

## Feuille d'exercices n° 1

**Exercice 1.** Montrer que si  $I$  est un ensemble quelconque, il ne peut pas exister de surjection de  $I$  sur  $\mathcal{P}(I)$ . (*Suggestion : étant donné une application  $\Phi : I \rightarrow \mathcal{P}(I)$ , montrer que  $E := \{i \in I; i \notin \Phi(i)\}$  ne peut pas appartenir à  $\Phi(I)$ .) Quel résultat en déduit-on lorsque  $I = \mathbb{N}$ ?*

**Exercice 2.** Le but de l'exercice est de donner 4 preuves différentes du fait que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

- (1) *1ère méthode : segments emboîtés.*
  - (a) Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'intervalles compacts non-triviaux telle que  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \notin I_n$ .
  - (b) En déduire le résultat.
- (2) *2ème méthode : développement décimal.* On rappelle que tout nombre réel  $x \in [0, 1[$  admet un unique développement décimal "propre", autrement dit,  $x$  peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) 10^{-k},$$

où les  $a_k(x)$  sont des entiers compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Utiliser ce fait pour montrer que si  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $[0, 1[$  alors on peut construire un réel  $x \in [0, 1[$  différent de tous les  $x_n$ , et conclure.

- (3) *3è méthode : utilisation de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .* Soit  $J : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie comme suit : si  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , alors

$$J(\varepsilon) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}.$$

Montrer que  $J$  est injective, et conclure.

- (4) *4ème méthode : démontrer le résultat en 2 lignes en utilisant le théorème de Baire.*

**Exercice 3.** (nombres transcendants)

Un nombre réel  $x$  est dit **algébrique** s'il est racine d'une équation de la forme  $P(x) = 0$ , où  $P$  est un polynôme non nul à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Un nombre qui n'est pas algébrique est dit **transcendant**. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des nombres transcendants.

- (1) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.
- (2) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et conclure.

**Exercice 4.** Montrer que si  $\Omega_1, \dots, \Omega_d$  sont des espaces métriques séparables, alors  $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$  est séparable.

**Exercice 5.** Soit  $(\Omega, d)$  un espace métrique séparable. Montrer que toute famille d'ouverts de  $\Omega$  deux à deux disjoints est dénombrable. (Autrement dit : si  $(O_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts non vides de  $\Omega$  et si  $O_i \cap O_j = \emptyset$  pour tous  $i, j$  tels que  $i \neq j$ , alors l'ensemble  $I$  est nécessairement dénombrable.)

**Exercice 6.** Montrer que tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}$  est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Considérer les composantes connexes de  $O$ .*)

**Exercice 7.** Soit  $\Omega$  un ensemble non dénombrable. On note  $d$  la distance discrète sur  $\Omega$ . Montrer que l'espace métrique  $(\Omega, d)$  n'est pas séparable.

**Exercice 8.** On note  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels; autrement dit, de toutes les fonctions bornées  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On munit  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .

- (1) Pour toute partie  $E$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $\mathbf{1}_E$  la fonction indicatrice de  $E$ , que l'on considère comme un point de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ . Calculer  $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{E'}\|_\infty$  pour  $E, E' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , et en déduire que si  $E \neq E'$ , alors les boules ouvertes  $B(\mathbf{1}_E, 1/2)$  et  $B(\mathbf{1}_{E'}, 1/2)$  sont disjointes.
- (2) Montrer que  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  n'est pas séparable.

**Exercice 9.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante.

- (1) Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $D_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}; f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\}$ , où  $f(x^-)$  et  $f(x^+)$  sont les limites à gauche et à droite de  $f$  au point  $x$ .
  - (a) Montrer que si  $x_1, \dots, x_N$  sont des points de  $D_\varepsilon$  avec  $x_1 < \dots < x_N$ , alors

$$N \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^N (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \leq \frac{1}{\varepsilon} (f(x_N^+) - f(x_1^-)).$$

- (b) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $D_\varepsilon \cap [-n, n]$  est fini.
  - (c) Conclure que  $D_\varepsilon$  est dénombrable.
- (2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est dénombrable.

**Exercice 10.** Soit  $D \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble dénombrable. On écrit  $D = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$  et on définit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[a_n, \infty[}(x).$$

Montrer que la fonction  $f$  est croissante, et que l'ensemble de ses points de discontinuité est exactement égal à  $D$ .

**Exercice 11.** Dans cet exercice,  $(\Omega, d)$  est un espace métrique.

- (1) Soit  $O$  un ouvert de  $\Omega$ , et soit  $F = O^c$ . Montrer que pour tout  $x \in \Omega$ , on a l'équivalence suivante :

$$x \in O \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \forall z \in F : d(x, z) \geq \frac{1}{n}.$$

- (2) Montrer que tout ouvert de  $\Omega$  est réunion dénombrable de fermés.

**Exercice 12.** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites de nombres positifs, ou bien deux suites bornées de nombres réels. Établir les inégalités suivantes :

$$\underline{\lim} u_n + \underline{\lim} v_n \leq \underline{\lim} (u_n + v_n) \leq \underline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n \leq \overline{\lim} (u_n + v_n) \leq \overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n.$$

**Exercice 13.** Soit  $(x_n)$  une suite de nombres positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel  $\alpha \in [0, 1[$  tel que  $x_n + \alpha x_{2n}$  tend vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$ .

- (1) On pose  $L = \overline{\lim} x_n$  et  $l = \underline{\lim} x_n$ . En utilisant les inégalités de l'Exercice 12, montrer qu'on a  $1 \leq l + \alpha L$  et  $1 \geq L + \alpha l$ .
- (2) Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et trouver sa limite.

**Exercice 14.** Soit  $\Lambda$  un ensemble, et soit  $(\Lambda_s)_{s \in S}$  une partition de  $\Lambda$ . Montrer que si  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de nombres positifs, alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{s \in S} \sum_{\lambda \in \Lambda_s} a_\lambda.$$

**Exercice 15.** Soit  $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de nombres positifs indexée par un ensemble produit  $I \times J$ . Montrer à l'aide de l'Exercice 14 qu'on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

**Exercice 16.** (série produit)

Soient  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres positifs de sommes

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad V := \sum_{l=0}^{\infty} v_l.$$

On note  $(w_n)$  la suite définie par

$$w_n := \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

En utilisant l'Exercice 14, montrer qu'on a

$$UV = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} u_k v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

**Exercice 17.** Dans cet exercice, on donne une preuve “inhabituelle” du fait que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde : dans ce qui suit, on suppose donc que  $\mathbb{R}$  est dénombrable, et on cherche à obtenir une contradiction.

- (1) En utilisant l'hypothèse, montrer qu'il existe une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  vérifiant  $f(t) > 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\sum_{t \in \mathbb{R}} f(t) < \infty$ .
- (2) On pose

$$x_0 := \sup \left\{ x \in \mathbb{R}; x < \sum_{t < x} f(t) \right\}.$$

- (a) Montrer que  $x_0$  est un nombre réel bien défini.
  - (b) Montrer que  $x_0 \leq \sum_{t < x_0} f(t)$ .
  - (c) Justifier l'existence d'un nombre  $x$  tel que  $x_0 < x < x_0 + f(x_0)$ , et montrer qu'on a  $x < \sum_{t < x} f(t)$ .
- (3) Conclure.

**Exercice 18.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la série  $\sum_{k \geq 1} (e^{1/k} - 1)^{1 + \frac{1}{n}}$  est convergente;

puis déterminer la limite de  $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{1/k} - 1)^{1 + \frac{1}{n}}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 19.** Déterminer la limite de  $u_n := \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k^2}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 20.** Montrer que si  $(f_n)$  est une suite de fonctions positives définies sur un ensemble  $I$ , alors

$$\sum_{i \in I} \lim f_n(i) \leq \lim \sum_{i \in I} f_n(i).$$

**Exercice 21.** (théorème de convergence dominée pour les séries)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur  $\mathbb{N}$ , et soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . On fait les hypothèses suivantes :

- (a)  $f_n(i) \rightarrow f(i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  quand  $n \rightarrow \infty$ ;
- (b) Il existe une fonction  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} g(i) < \infty$  et  $|f_n(i)| \leq g(i)$  pour tout  $n$  et pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

- (1) Montrer que la série  $\sum f(i)$  est absolument convergente.
- (2) Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\forall n \geq 0 : \left| \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) - \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \right| \leq \sum_{i=0}^N |f_n(i) - f(i)| + 2 \sum_{i>N} g(i).$$

- (3) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i).$$

**Exercice 22.** En utilisant la formule du binôme et l'Exercice 21, montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

**Exercice 23.** En utilisant l'Exercice 21, montrer que pour tout  $\alpha > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^{n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}.$$

**Exercice 24.** Soit  $\Omega$  un ensemble. Montrer que pour tous  $A, B \subset \Omega$ , on a

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

**Exercice 25.** Soit  $\Omega$  un ensemble, et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $\Omega$  deux à deux disjointes. Exprimer la fonction indicatrice de  $\bigcup_{i \in I} A_i$  à l'aide des fonctions indicatrices des  $A_i$ .

**Exercice 26.** Soit  $\Omega$  un ensemble. Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $\Omega$ , on définit leur **différence symétrique**  $A \Delta B$  par  $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

(1) Montrer que pour tous  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  et pour tout  $x \in \Omega$ , on a

$$\mathbf{1}_{A\Delta B}(x) = |(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)(x)| = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) \pmod{2}.$$

(2) Montrer que  $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$  est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre, et le symétrique d'un élément  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

(3) Montrer que  $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif. Préciser l'élément unité.

**Exercice 27.** Soit  $\Omega$  un ensemble, et soit  $(A_n)$  une suite de parties de  $\Omega$ . On note  $\overline{\lim} A_n$  l'ensemble des  $x \in \Omega$  qui appartiennent à une infinité de  $A_n$ , et  $\underline{\lim} A_n$  l'ensemble des  $x \in \Omega$  qui appartiennent à tous les  $A_n$  à partir d'un certain rang. Vérifier qu'on a

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n.$$

**Exercice 28.** Soit  $\Omega$  un ensemble, et soit  $(A_n)$  une suite de parties de  $\Omega$ . Montrer qu'on a

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}.$$

**Exercice 29.** Soit  $\Omega$  un ensemble. On dit qu'une suite  $(A_n)$  de parties de  $\Omega$  est **convergente** si on a  $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$ , et on note alors  $\lim A_n$  cet ensemble.

- (1) Comment se traduit la convergence d'une suite d'ensembles en termes de fonctions indicatrices?
- (2) Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite  $(A_n)$  est convergente; et si c'est le cas, trouver sa limite.
  - (a) La suite  $(A_n)$  est croissante.
  - (b) La suite  $(A_n)$  est décroissante.
  - (c) Les ensembles  $A_n$  sont deux à deux disjoints.