

## Feuille d'exercices n° 4

**Exercice 1.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $X$  une va réelle uniformément distribuée sur l'ensemble  $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ . Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 2.** Soit  $X$  une va réelle uniformément distribuée sur un intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 3.** Soit  $X$  une va suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Montrer que si  $\lambda$  est un *entier*, alors

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}.$$

**Exercice 4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes et de même loi  $\mu := \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(t) dt$ . Calculer  $\mathbb{E}\left(e^{-\frac{1}{X\sqrt{Y}}}\right)$ .

**Exercice 5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes et strictement positives définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Montrer que les va  $(X, Y)$  et  $(Y, X)$  ont la même loi, et en déduire qu'on a  $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$ .

**Exercice 6.** Montrer que si  $Z$  et  $S$  sont des va réelles indépendantes, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_{S+Z}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_S(t - z) d\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{E}(F_S(t - Z)).$$

**Exercice 7.** Soient  $X$  et  $T$  deux va réelles indépendantes. On note  $F_X$  et  $F_T$  leurs fonctions de répartition. Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \leq T) = \mathbb{E}(F_X(T));$$

et que si la fonction  $F_T$  est continue, alors on a aussi

$$\mathbb{P}(X \leq T) = \mathbb{E}(1 - F_T(X)).$$

**Exercice 8.** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Soit également  $a \in \mathbb{N}^*$  fixé. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Enfin, pour  $\omega \in \Omega$ , on note  $T(\omega)$  le plus petit entier  $n$  tel que  $S_n(\omega) \geq a$  s'il en existe un, et on pose  $T(\omega) = \infty$  si  $S_n(\omega) < a$  pour tout  $n \geq 1$ .

- (1) Montrer que  $T$  est à valeurs dans  $\{a, a + 1, a + 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ , et que  $T$  est une va (*i.e.*  $T$  est mesurable).
- (2) Montrer que  $T < \infty$  ps.
- (3) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P}(T = a + k) = \binom{a + k - 1}{a - 1} p^a (1 - p)^k.$$

- (4) Quelle formule “bien connue” obtient-on en appliquant (2) et (3) ?
- (5) On suppose que  $a \geq 2$ . Montrer que  $\mathbb{E} \left( \frac{a-1}{T-1} \right) = p$  et  $\mathbb{E} \left( \frac{a}{T} \right) > p$ .

**Exercice 9.** Le but de l'exercice est de montrer que pour tout  $\theta > 0$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\theta}{\theta + k} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{\theta + k}.$$

- (1) Montrer par récurrence sur  $n$  le résultat suivant : si  $X_1, \dots, X_n$  sont des va réelles indépendantes suivant la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ , et si  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des va réelles indépendantes telles que  $Y_k$  suit la loi  $\mathcal{E}(k)$  pour  $k = 1, \dots, n$ , alors  $X := \max(X_1, \dots, X_n)$  a la même loi que  $Y := Y_1 + \dots + Y_n$ . (*Utiliser les fonctions de répartition et l'Exercice 6.*)
- (2) Soit  $T$  un va réelle suivant la loi  $\mathcal{E}(\theta)$ . Soient également  $X_1, \dots, X_n$  des va réelles indépendantes, indépendantes de  $T$  et de loi  $\mathcal{E}(1)$ , et soit  $X := \max(X_1, \dots, X_n)$ . En utilisant l'Exercice 7, montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \mathbb{E}((1 - e^{-T})^n).$$

- (3) Démontrer la formule annoncée.

**Exercice 10.** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur  $[0, 1]$ , définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

- (1) En utilisant l'Exercice 6, montrer par récurrence sur  $n$  que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0, 1] : F_{S_n}(t) = \frac{t^n}{n!}.$$

- (2) Pour  $n \geq 2$ , calculer  $\mathbb{P}(1 - X_n < S_{n-1} \leq 1)$ .

- (3) On définit une application  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  de la façon suivante : si  $\omega \in \Omega$ , alors  $T(\omega)$  est le plus petit entier  $n$  tel que  $S_n(\omega) > 1$  s'il en existe un, et  $T(\omega) = \infty$  si  $S_n(\omega) \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$ . Justifier que  $T$  est une va, et montrer que  $\mathbb{E}(T) = e$ .

**Exercice 11.** Soit  $X$  une va réelle, et soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes et de même loi que  $X$  (définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ). Soit également  $N$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , indépendante des  $X_i$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Enfin, pour  $\omega \in \Omega$  on pose

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1 + \dots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

- (1) Justifier que  $S_N$  est une va et exprimer  $S_N$  comme somme d'une série faisant intervenir  $N$  et les  $S_n$ .
- (2) Montrer que si  $X$  et  $N$  sont dans  $L^1$ , alors  $S_N \in L^1$  et

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X).$$

**Exercice 12.** Soit  $X$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

- (1) Justifier que la va  $\frac{1}{X+1}$  est dans  $L^1$ .
- (2) On note  $G_X = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction génératrice de  $X$ ,

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \int_0^1 G_X(s) ds.$$

- (3) On suppose que  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Calculer  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ .

**Exercice 13.** Dans cet exercice,  $X$  est une va réelle.

- (1) Montrer qu'il existe au moins un nombre réel  $m$  tel que  $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$  et  $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$ . On dit qu'un tel  $m$  est une **médiane** de  $X$ . (On pourra considérer  $m := \inf\{t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq 1/2\}$ .)
- (2) Montrer que si  $m$  est une médiane de  $X$ , alors :

$$\begin{aligned} \forall x > m : \mathbb{P}(X \leq x) &\geq \frac{1}{2} & \text{et} & \quad \mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{2}; \\ \forall x < m : \mathbb{P}(X \geq x) &\geq \frac{1}{2} & \text{et} & \quad \mathbb{P}(X \leq x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (3) Soit  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\psi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$ . Montrer que si  $X \in L^1$  et si  $a < b$ , alors

$$\mathbb{E}(|X - b|) - \mathbb{E}(|X - a|) = \int_a^b \psi(x) dx.$$

- (4) On suppose que  $X \in L^1$ . Dédurre des questions précédentes que si  $m$  est une médiane de  $X$ , alors

$$\mathbb{E}(|X - m|) = \inf \left\{ \mathbb{E}(|X - u|); u \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Exercice 14.** Soit  $X$  une va réelle, et soit  $\varepsilon$  une va indépendante de  $X$  et suivant la loi de Rademacher, i.e.  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$ . On pose  $Y = \varepsilon X$ .

- (1) Montrer qu'on a  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$ .
- (2) Montrer que si la va  $X^2$  n'est pas presque sûrement constante, alors  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

**Exercice 15.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ .

- (1) On suppose que  $X$  ne peut prendre que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction borélienne quelconque, alors  $f(X)$  est fonction affine de  $X$ , i.e. il existe des constantes  $a$  et  $b$  telles que  $f(X) = aX + b$ .
- (2) On suppose que  $X$  et  $Y$  ne peuvent prendre chacune que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes *si et seulement si*  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$ .

**Exercice 16.** Soient  $X_1, \dots, X_N$  des va réelles deux à deux indépendantes et appartenant à  $L^2$ , de même moyenne  $m$  et de même variance  $\sigma^2$ . On pose

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2.$$

Calculer  $\mathbb{E}(\bar{X})$  et  $\mathbb{E}(V)$ .

**Exercice 17.** Soit  $X$  une va réelle définie sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , et soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions croissantes.

- (1) Montrer que si  $Y$  est une autre va réelle définie sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , alors la va  $Z = (f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))$  est positive.

- (2) On suppose que les va  $f(X)$  et  $g(X)$  sont dans  $L^2$ . En appliquant (1) à une va  $Y$  indépendante de  $X$  et de même loi que  $X$ , montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geq \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(X)).$$

**Exercice 18.** Soit  $X$  un va à valeurs dans un intervalle  $[a, b]$ . En utilisant le fait que  $\sigma^2(X) = \sigma^2(X - c)$  pour toute constante  $c$ , montrer que  $\sigma^2(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ .

**Exercice 19.** Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , et soient  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  des va à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , deux à deux indépendantes et suivant chacune la loi de Rademacher, *i.e.*  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$ . Calculer  $\mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^2 \right)$ .

**Exercice 20.** Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ , et soient  $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^d$  tels que  $\|u_i\| \leq 1$  pour  $i = 1, \dots, N$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ . Soient également  $p_1, \dots, p_N \in [0, 1]$ . On pose

$$v := \sum_{i=1}^N p_i u_i.$$

- (1) Soient  $X_1, \dots, X_N$  des va indépendantes, chaque  $X_i$  suivant la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p_i)$ . Montrer qu'on a

$$\mathbb{E} \left( \left\| v - \sum_{i=1}^N X_i u_i \right\|^2 \right) = \sum_{i=1}^N p_i (1 - p_i) \|u_i\|^2.$$

- (2) Montrer qu'il existe  $x_1, \dots, x_N \in \{0, 1\}$  tels que

$$\left\| v - \sum_{i=1}^N x_i u_i \right\| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

**Exercice 21.** (Borel-Cantelli amélioré)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et soit  $(E_i)_{i \geq 1}$  une suite d'événements *deux à deux indépendants*. On suppose qu'on a  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \infty$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $\mathbb{P}(\overline{\lim} E_i) = 1$ . (La subtilité est qu'on ne suppose pas que les  $E_i$  sont indépendants.)

- (1) Soit  $(S_n)_{n \geq 1}$  une suite *croissante* de va réelles positives et appartenant à  $L^2$ . On suppose que

$$\mathbb{E}(S_n) \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\sigma^2(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- (a) Montrer que  $T_n = \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$  tend vers 1 en norme  $L^2$ .

(b) En déduire que  $S_n \rightarrow \infty$  presque sûrement.

(2) Conclure en observant que  $\overline{\lim} E_i = \{\omega \in \Omega; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_i}(\omega) = \infty\}$ .

**Exercice 22.** Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\phi'$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et  $\phi(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . Montrer que si  $Z$  est une va réelle quelconque, alors  $\phi(Z) \in L^1$  et

$$\mathbb{E}(\phi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Z > t) \phi'(t) dt.$$

**Exercice 23.** Soit  $X$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$ .

**Exercice 24.** Soit  $X$  une va réelle. On suppose qu'il existe des constantes  $A, c, \alpha, t_0 > 0$  telles que  $\forall t > t_0 : \mathbb{P}(|X| > t) \leq A e^{-ct^\alpha}$ . Montrer que  $X \in L^p$  pour tout  $p \in [1, \infty[$ .

**Exercice 25.** Soit  $X$  une va réelle suivant la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que  $X \in L^p$  pour tout  $p < \infty$ , et calculer  $\mathbb{E}(X^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 26.** Soit  $p \in [1, \infty[$ , et soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et appartenant à  $L^p$ .

(1) Montrer que  $\|X + Y\|_p^p \geq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |x + y| d\mathbb{P}_Y(y) \right)^p d\mathbb{P}_X(x)$ .

(2) En déduire que si  $Y$  est centrée, alors  $\|X + Y\|_p \geq \|X\|_p$ .

**Exercice 27.** Soit  $X$  une va réelle appartenant à  $L^4$ . Pour  $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ , on pose  $m_k := \mathbb{E}(X^k)$ .

(1) Montrer qu'on a  $m_3 \leq m_4^{3/4}$ .

(2) Dans cette question, on suppose que  $m_1 \leq 0$ .

(a) En considérant la forme quadratique  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $Q(u, v, w) := \mathbb{E} \left[ (u + vX + wX^2)^2 \right]$ , montrer que

$$\det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

(b) En déduire l'inégalité  $m_3^2 \leq m_4 m_2 - m_2^3$ .

(c) Montrer qu'on a  $m_3 \leq \left(\frac{4}{27}\right)^{1/4} m_4^{3/4}$ .

**Exercice 28.** Soit  $a > 0$ , et soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, a]$  une fonction borélienne. Montrer que pour tout  $0 \leq \alpha < a$ , on a

$$\mathbb{P}(\phi(X) \geq \alpha) \geq \frac{\mathbb{E}(\phi(X)) - \alpha}{a - \alpha}.$$

**Exercice 29.** Soit  $X$  une va réelle positive appartenant à  $L^2$ , et soit  $\alpha \in ]0, 1[$ .

(1) On pose  $m = \mathbb{E}(X)$ . En écrivant  $X = X \mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X) + X \mathbf{1}_{]-\infty, \alpha m](X)}$ , établir l'inégalité

$$(1 - \alpha) m \leq \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X)).$$

(2) Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Paley-Zygmund**.)

**Exercice 30.** Soit  $X$  une va réelle appartenant à  $L^2$ , de moyenne  $m$ , et soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes et de même loi que  $X$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . En utilisant convenablement l'inégalité de Tchebitchev, montrer que

$$\underline{\lim} \frac{|S_n - nm|}{\sqrt{n}} < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

**Exercice 31.** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de va réelles indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . On suppose que les  $X_i$  sont dans  $L^2$ , qu'elles sont centrées, et qu'on a  $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^2(X_i) < \infty$ . Le but de l'exercice est de montrer que la série  $\sum X_i$  converge presque sûrement.

(1) Soient  $m, N \in \mathbb{N}$ , avec  $N \leq m$ . Pour  $j \in \{N, \dots, m\}$ , on pose  $S_j := \sum_{i=N}^j X_i$ .

Soit également  $\varepsilon > 0$ . Le but de cette question est d'établir l'inégalité suivante (qu'on appelle l'**inégalité maximale de Kolmogorov**) :

$$\mathbb{P}\left(\max_{N \leq j \leq m} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^m \sigma^2(X_i).$$

(a) Pour  $i \in \{N, \dots, m\}$ , on pose

$$B_i := \{\omega \in \Omega; |S_k(\omega)| < \varepsilon \text{ pour tout } k \text{ vérifiant } N \leq k < i\}.$$

Montrer que pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a l'équivalence suivante :

$$\max_{N \leq j \leq m} |S_j(\omega)| \geq \varepsilon \iff \left| \sum_{i=N}^m X_i(\omega) \mathbf{1}_{B_i}(\omega) \right| \geq \varepsilon.$$

(b) Montrer que si  $N \leq i < i' \leq m$ , alors les va  $X_{i'}$  et  $X_i \mathbf{1}_{B_i} \mathbf{1}_{B_{i'}}$  sont indépendantes.

(c) Dédire de (b) qu'on a

$$\mathbb{E} \left( \left( \sum_{i=N}^m X_i \mathbf{1}_{B_i} \right)^2 \right) \leq \sum_{i=N}^m \sigma^2(X_i).$$

(d) Démontrer l'inégalité souhaitée

(2) Dédire de (1) que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \exists m \geq N : \left| \sum_{i=N}^m X_i \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i).$$

(3) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer à l'aide de (2) que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \exists p, q \geq N : \left| \sum_{i=p}^q X_i(\omega) \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i).$$

(4) Conclure.

**Exercice 32.** Soit  $(a_i)$  une suite de nombres réels telle que  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$ . En utilisant l'Exercice 31, montrer qu'il existe une suite de signes  $(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$  telle que la série  $\sum \varepsilon_i a_i$  est convergente.

**Exercice 33.** Soit  $X$  une va à valeurs dans  $[-1, 1]$  et telle que  $\mathbb{E}(X) = 0$ . Le but de l'exercice est de montrer que pour tout  $r > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq 2e^{-r^2/2}.$$

(1) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{x+1}{2} e^t$ .

(2) En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$ .

(3) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 34.** Soit  $X$  une variable aléatoire bornée, d'espérance nulle, et soit  $(X_i)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que  $X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $\frac{S_n}{n^\alpha}$  tend presque sûrement vers 0 pour tout  $\alpha > 1/2$ .

(1) Justifier que  $e^{tX} \in L^1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

(2) Soit  $a > 0$ . Montrer que pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq e^{-\lambda a} (\mathbb{E}(e^{\lambda X})^n + \mathbb{E}(e^{-\lambda X})^n).$$

(3) Montrer que la fonction  $t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , puis montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\forall t \in [-1, 1] : \mathbb{E}(e^{tX}) \leq 1 + Ct^2$ .

(4) Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $\lambda \in ]0, 1]$ , on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\lambda n^\alpha \varepsilon + Cn\lambda^2}.$$

(5) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 35.** Dans tout l'exercice,  $X$  est une va réelles, et  $X_1, \dots, X_n$  sont des va indépendantes et de même loi que  $X$ . On pose

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad T_n := X_1^2 + \dots + X_n^2.$$

(1) Montrer que si  $S, T$  sont des va réelles et si  $x, y, u, v \geq 0$ , alors

$$\mathbb{P}(S \geq x, T \leq y) \leq e^{-ux+vy} \mathbb{E}(e^{uS-vT})$$

(2) Montrer à l'aide de (1) que

$$\forall x, y, u, v \geq 0 : \mathbb{P}((S_n \geq x, T_n \leq y) \leq e^{-ux+vy} \mathbb{E}(e^{uX-vX^2})^n.$$

(3) Dans cette question, on suppose que la va  $X$  est **symétrique**, ce qui signifie que  $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$ . Montrer que

$$\forall u, v \geq 0 : \mathbb{E}(e^{uX-vX^2}) = \mathbb{E}(\text{ch}(uX) e^{-vX^2});$$

et en déduire que

$$\forall u \geq 0 : \mathbb{E}\left(e^{uX - \frac{u^2}{2}X^2}\right) \leq 1.$$

(4) On suppose que la va  $X$  est symétrique. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x, y > 0 : \mathbb{P}(S_n \geq x, T_n \leq y) \leq e^{-\frac{x^2}{2y}}.$$

(5) On suppose que la va  $X$  est symétrique et *bornée*, et on pose  $C = \|X\|_\infty$ . En observant que  $T_n \leq C^2n$ , déduire de (4) que

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\varepsilon^2/2C^2}.$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hoeffding**.

**Exercice 36.** Dans tout l'exercice, on fixe une suite  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de va indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , et suivant toutes la loi de Rademacher, i.e.  $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$ . On note  $\mathcal{E} \subseteq L^\infty$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions  $\varepsilon_i$ . Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *sur l'espace  $\mathcal{E}$ , toutes les normes  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p < \infty$  sont équivalentes.* (Ce résultat est remarquable car  $\mathcal{E}$  est de dimension infinie.)

(0) Soit  $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ , où  $I \subseteq \mathbb{N}$  est fini. Calculer  $\|Z\|_2^2$ .

(1) Soit  $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ .

(a) Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , calculer  $\mathbb{E}(e^{\pm \lambda Z})$  et montrer qu'on a  $\mathbb{E}(e^{\pm \lambda Z}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2} \sum_i a_i^2}$ .

(b) Montrer que pour tout  $t > 0$ , on a

$$\mathbb{P}(|Z| > t) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i \in I} a_i^2}\right).$$

(2) Soit  $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ , et soit  $1 \leq p < \infty$ . En utilisant (1) et “la formule bien connue” pour  $\mathbb{E}(|Z|^p)$ , montrer que si  $\|Z\|_2 = 1$ , alors  $\|Z\|_p \leq B_p$ , où  $B_p$  est une constante finie dépendant uniquement de  $p$ .

(3) Soient toujours  $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$  et  $1 \leq p < \infty$ .

(a) Comparer  $\|Z\|_p$  et  $\|Z\|_2$  lorsque  $p \geq 2$ .

(b) (i) Montrer que si  $X$  est une variable aléatoire positive, alors

$$\mathbb{E}(X^2) \leq (\mathbb{E}(X^p))^{2/3} \times (\mathbb{E}(X^{6-2p}))^{1/3}.$$

(ii) On suppose que  $p < 2$ . En utilisant (i) et en appliquant (2) à un autre exposant que  $p$ , montrer que si  $\|Z\|_2 = 1$ , alors  $\|Z\|_p \geq A_p$  pour une certaine constante  $A_p > 0$  dépendant uniquement de  $p$ .

(4) Conclure.

**Exercice 37.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On définit les **polynômes de Bernstein**  $B_n f$ ,  $n \geq 1$  par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de l'exercice est de montrer “de manière probabiliste” que  $B_n f$  tend uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

(1) Soit  $x \in [0, 1]$  fixé. On considère une suite  $(X_i)_{i \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre  $x$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

(a) Vérifier que  $B_n f(x) - f(x) = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right]$ .

(b) Calculer  $\mathbb{E} \left( \frac{S_n}{n} \right)$  et  $\sigma^2 \left( \frac{S_n}{n} \right)$ , et en déduire que pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

(2) Pour  $\delta > 0$ , on pose  $\omega_f(\delta) = \sup \{ |f(v) - f(u)|; |v - u| < \delta \}$ . Déduire de (1) que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

(3) Conclure.

**Exercice 38.** On garde les notations de l'exercice 37. Montrer que si la fonction  $f$  est *lipschitzienne* sur  $[0, 1]$ , alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

**Exercice 39.** On garde les notations de l'exercice 37, et on suppose que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$ .

(1) Soit  $M = \sup \{ |f''(t)|; t \in [0, 1] \}$ . Montrer que pour  $u, x \in [0, 1]$ , on peut écrire

$$f(u) - f(x) = f'(x)(u - x) + R(u, x), \quad \text{où } |R(u, x)| \leq \frac{M}{2}(u - x)^2.$$

(2) Montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{n}.$$

**Exercice 40.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$ .

(1) Vérifier que  $f$  est lipschitzienne.

(2) Soient  $B_n f$ ,  $n \geq 1$  les polynômes de Bernstein associés à  $f$  (cf l'Exercice 37). Soit également  $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher. Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\left| B_n f \left( \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1}{2n} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \right).$$

- (3) En utilisant l'Exercice 36, en déduire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \geq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Comparer ce résultat à celui de l'Exercice 38.