

## Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1.** Soient  $a, b > 0$ , et soient  $X$  et  $Y$  deux va indépendantes, avec  $X$  uniformément distribuée sur  $]0, a[$  et  $Y$  uniformément distribuée sur  $]0, b[$ . Déterminer la loi de  $XY$ .

**Exercice 2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes et de même loi  $\mu := \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(t) dt$ . Calculer  $\mathbb{P}(X \geq \sqrt{Y})$  et  $\mathbb{P}(X + 2Y \leq 7)$ .

**Exercice 3.** Soient  $X$  et  $Y$  sont des va réelles indépendantes suivant des lois normales  $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$  et  $\mathcal{N}(0, \beta^2)$ .

- (1) Déterminer la loi de  $Z := (X + Y, \beta^2 X - \alpha^2 Y)$  en utilisant convenablement le théorème de transfert et la formule de changement de variables.
- (2) *En déduire* que  $X + Y$  suit la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , où  $\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

**Exercice 4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes suivant chacune la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Soient aussi  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Montrer que les va  $X' = aX + bY$  et  $Y' = -bX + aY$  sont indépendantes et déterminer leurs lois.

**Exercice 5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles. On pose  $M := \max(X, Y)$  et  $m := \min(X, Y)$ . On suppose que la va  $Z := (X, Y)$  admet une densité  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

- (1) Déterminer la loi de  $\tilde{Z} := (m, M)$ .
- (2) En déduire que  $M$  et  $m$  admettent des densités, et exprimer ces densités à l'aide de la fonction  $\rho$ .

**Exercice 6.** Soient  $R$  et  $\Theta$  deux va réelles indépendantes, à valeurs dans  $]0, 1[$  et  $]0, 2\pi[$  respectivement. On pose  $Z := (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$ .

- (1) On suppose que  $R$  est uniformément distribuée sur  $]0, 1[$  et que  $\Theta$  est uniformément distribuée sur  $]0, 2\pi[$ . Déterminer la loi de  $Z$ .
- (2) On suppose que la va  $Z$  est uniformément distribuée sur le disque unité  $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ . Déterminer les lois de  $R$  et de  $\Theta$ .

**Exercice 7.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ .

- (1) Soit  $\tilde{\Omega} := \Omega \times \Omega$  muni de la tribu produit  $\tilde{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  et de la loi produit  $\tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}$ . On note  $\tilde{Z} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la va définie par  $\tilde{Z}(\omega_1, \omega_2) := (X(\omega_1), Y(\omega_2))$ . Montrer que  $\tilde{Z}$  a la même loi que  $Z := (X, Y)$ .
- (2) Montrer que pour toute fonction borélienne  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on a

$$\int_{\Omega} f(X + Y) d\mathbb{P} = \int_{\Omega \times \Omega} f(X(\omega_1) + Y(\omega_2)) d\mathbb{P}(\omega_1) d\mathbb{P}(\omega_2).$$

**Exercice 8.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux va réelles indépendantes, à densité et strictement positives. On note  $\rho_1$  et  $\rho_2$  les densités associées. Montrer que  $U := X_1/X_2$  est une va à densité, dont la densité  $\rho$  est donnée par  $\rho(u) := 0$  pour  $u \leq 0$  et  $\rho(u) := \int_0^\infty y\rho_1(yu)\rho_2(y) dy$  pour  $u > 0$ .

**Exercice 9.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux va réelles indépendantes. On suppose que les lois  $\mathbb{P}_{X_1}$  et  $\mathbb{P}_{X_2}$  sont diffuses, *i.e.*  $\mathbb{P}_{X_1}(\{a\}) = 0 = \mathbb{P}_{X_2}(\{a\})$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

- (1) Montrer que  $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$ .
- (2) En déduire que si  $X_1$  et  $X_2$  ont la même loi, alors  $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2) = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 10.** Le but de l'exercice est de donner une preuve "probabiliste" de la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- (1) Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux va indépendantes et strictement positives définies sur le même espace de probabilité, admettant chacune la densité

$$\rho(t) := \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+t^2} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(t).$$

- (a) Vérifier que  $\rho$  est bien une densité lebesguienne.
- (b) En utilisant l'Exercice 8, montrer que  $U := X_1/X_2$  admet la densité  $q(u) := \frac{4}{\pi^2} \frac{\log(u)}{u^2-1} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(u)$ .
- (c) En utilisant l'Exercice 9, en déduire la formule

$$\int_0^1 \frac{-\log(u)}{1-u^2} du = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (2) Déduire de (1) qu'on a  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , puis démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 11.** (paradoxe de Bertrand)

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans le plan. Une **corde de  $\mathcal{C}$**  est un segment  $[A, A']$ , où  $A$  et  $A'$  sont des points de  $\mathcal{C}$ . On s'intéresse à la probabilité que la longueur d'une corde "choisie au hasard" soit plus grande que  $\sqrt{3}$  (qui est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle). Dans ce qui suit, on notera  $X$  la longueur de la corde.

- (1) Dans cette question, on modélise la situation en considérant que les extrémités  $A$  et  $A'$  de la corde sont choisies au hasard sur le cercle  $\mathcal{C}$ , et indépendamment l'une de l'autre.
  - (a) On note  $\theta$  et  $\theta'$  les angles  $\widehat{OxA}$  et  $\widehat{OxA'}$  (pris dans  $[0, 2\pi[$ ). Quelle est la loi de  $\Phi := (\theta, \theta')$  ?
  - (b) Calculer  $X$  en fonction de  $\theta$  et  $\theta'$ .
  - (c) Déterminer la loi de  $X$ .
  - (d) Déterminer la probabilité cherchée.
  
- (2) Dans cette question, on modélise la situation d'une autre façon en considérant que le milieu  $M$  de la corde  $[A, A']$  est choisi au hasard dans le disque unité  $\mathbb{D} := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$ .
  - (a) Calculer  $X$  en fonction des coordonnées  $(u, v)$  de  $M$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $X$  et la probabilité cherchée.

**Exercice 12.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des va réelles indépendantes suivant des lois normales  $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ . On pose  $m := m_1 + \dots + m_n$  et  $\sigma^2 := \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . On pose aussi  $S_n := X_1 + \dots + X_n$ . Déterminer la loi de  $Z_n = \frac{S_n - m}{\sigma}$ .

**Exercice 13.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes, uniformément distribuées sur  $[-1, 1]$ . Déterminer la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 14.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminer la loi de  $X + Y$ .

**Exercice 15.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux va réelles indépendantes suivant chacune loi de Cauchy  $\frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$ . Montrer que  $X + Y$  suit la loi  $\frac{2}{\pi} \frac{dx}{4+x^2}$ , puis montrer que  $\frac{X+Y}{2}$  suit la loi de Cauchy.

**Exercice 16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va réelles indépendantes, de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- (1) Déterminer la loi de  $X^2 + Y^2$ .
- (2) On pose  $Z := (X, Y)$ . Justifier l'existence de deux va  $R$  et  $\Theta$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et  $[0, 2\pi[$  respectivement, telles que  $Z = (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$ .
- (3) Déterminer loi de la va  $(R, \Theta)$ , puis les lois de  $R$  et de  $\Theta$ .
- (4) Les va  $R$  et  $\Theta$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 17.** On dit qu'une va réelle  $X$  suit une **loi gamma de paramètres**  $(\alpha, \lambda)$ , où  $\alpha, \lambda > 0$ , si

$$\mathbb{P}_X = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) dx.$$

- (1) Montrer que si  $X$  et  $X'$  sont deux va indépendantes suivant des lois gamma de paramètres  $(\alpha, \lambda)$  et  $(\alpha', \lambda)$ , alors  $X + X'$  suit une loi gamma de paramètres  $(\alpha + \alpha', \lambda)$ .
- (2) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des va indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Déterminer la loi de  $X_1 + \dots + X_n$ .
- (3) Montrer que si  $X$  est une va suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $X^2$  suit une loi gamma de paramètres à déterminer.
- (4) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des va indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Déterminer la loi de  $X_1^2 + \dots + X_n^2$ .

**Exercice 18.** On considère que le nombre annuel de tremblements de terre en Bretagne suit approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = \frac{1}{5}$ . Déterminer la probabilité qu'il y ait (en Bretagne) au moins 4 tremblements de terre en 20 ans.

**Exercice 19.** Soient  $X$  et  $Y$  deux va indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $X + Y$  a la même loi que  $X$ . Montrer que  $Y = 0$  presque sûrement.

**Exercice 20.** Soit  $\lambda > 0$ , et soit  $(T_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ . Soit également  $a > 0$ . On définit une va  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  en posant pour  $\omega \in \Omega$  :

$$N(\omega) := \# \{n \geq 1; T_1(\omega) + \dots + T_n(\omega) \leq a\}.$$

- (1) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\mathbb{P}(N \geq k)$  en utilisant l'Exercice 17.
- (2) Montrer que  $N$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda a)$ .

**Exercice 21.** Soit  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de va indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , chaque  $X_i$  suivant une loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p_i)$ . On note  $K : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la va définie par  $K := \min\{k \in \mathbb{N}; X_k = 1\}$ , avec la convention  $\min \emptyset = \infty$ .

- (1) Calculer  $\mathbb{P}(K = k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- (2) Montrer qu'on a ( $K < \infty$  ps) si et seulement si la série  $\sum p_i$  diverge.

**Exercice 22.** Soit  $p \in ]0, 1[$ , et soit  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de va indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ , suivant toutes la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ . On définit des va  $T_0, T_1, T_2, \dots$  à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  de la façon suivante :  $T_0 := 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,

$$T_n := \min \left\{ k > T_{n-1}; X_k = 1 \right\},$$

avec la convention  $\min \emptyset = \infty$ .

- (1) Montrer que  $T_1 < \infty$  presque sûrement, et déterminer la loi de  $T_1$ .
- (2) Montrer que  $\mathbb{P}(T_n = l + k | T_{n-1} = l) = \mathbb{P}(T_1 = k)$  pour tout  $n \geq 2$  et pour tous  $k, l \in \mathbb{N}^*$ .
- (3) Montrer que  $T_n < \infty$  presque sûrement pour tout  $n \geq 2$  et que les va  $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}$  sont indépendantes et de même loi que  $T_1$ .
- (4) Calculer la fonction génératrice  $G_n$  de  $T_n$  pour tout  $n \geq 2$ , et en déduire la loi de  $T_n$ .

**Exercice 23.** Soit  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de va indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans un univers  $(\Lambda, \mathfrak{B})$ . On suppose que les  $X_i$  suivent toutes la même loi  $\mu$ . Soit également  $T$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'évènement  $\{T = n\}$  appartient à la tribu  $\sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Montrer que  $X_T$  est une va à valeurs dans  $(\Lambda, \mathfrak{B})$ , et que  $\mathbb{P}_{X_T} = \mu$ .

**Exercice 24.** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ . Soit également  $N$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendante des  $X_i$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n := X_1 + \dots + X_n$  (avec la convention  $S_0 = 0$ ), et on définit  $S_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

- (1) Montrer que  $S_N$  est une va.
- (2) Montrer que si  $N$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ , alors  $S_N$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda p)$ .
- (3) Montrer que si  $N$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(m, q)$ , alors  $S_N$  suit la loi  $\mathcal{B}(m, qp)$ .

**Exercice 25.** Soit  $X$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et soit Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes et de même loi que  $X$ . Soit également  $N$  une va à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  et indépendante des  $X_i$ . Enfin, soit  $S_N$  la va définie par  $S_N(\omega) := S_1(\omega) \dots + S_{N(\omega)}(\omega)$ . Montrer que la fonction génératrice de  $S_N$  est donnée par

$$G_{S_N}(s) = G_N(G_X(s)) \quad \text{pour tout } s \in [-1, 1].$$

**Exercice 26.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et soit  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements. Montrer que si  $\inf_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i) > 0$ , alors  $\overline{\lim} E_i \neq \emptyset$ .

**Exercice 27.** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de va indépendantes à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , telles que  $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$  pour tout  $i \geq 1$ , où  $0 < p < 1$  et  $p \neq 1/2$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Z_n := X_1 + \dots + X_{2n}$ , et on note  $E_n$  l'évènement  $\{Z_n = 0\}$ . Montrer que  $\mathbb{P}(\overline{\lim} E_n) = 0$ .

**Exercice 28.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité, et soit  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements indépendants ayant tous la même probabilité  $p$ . Soit également  $b \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_k$  l'évènement défini comme suit :  $\omega \in A_k$  si et seulement si il existe un entier  $i \in \{k, 2k, \dots, b^k k\}$  tel que  $\omega \in E_{i+1} \cap \dots \cap E_{i+k}$ .

- (1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $i \in I_k := \{k, 2k, \dots, b^k k\}$ , on pose  $B_i := E_{i+1} \cap \dots \cap E_{i+k}$ . Montrer qu'on a

$$\sum_{i \in I_k} \mathbb{P}(B_i) \geq \mathbb{P}(A_k) \geq \sum_{i \in I_k} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{\{(i,j); i < j\}} \mathbb{P}(B_i \cap B_j).$$

- (2) Montrer que si  $p < 1/b$ , alors  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_k) = 0$ .

- (3) Dans cette question, on suppose que  $p = 1/b$ .

(a) Calculer  $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$  pour  $i, j \in I_k$  et  $i < j$ .

(b) Montrer que  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_k) = 1$ .

**Exercice 29.** Soit  $X$  une va réelle à valeurs positives, et soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de va indépendantes et de même loi que  $X$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_n := \{X_n > n\}$ . Montrer qu'on a  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$  si  $\mathbb{E}(X) < \infty$ , et  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$  si  $\mathbb{E}(X) = \infty$ .

**Exercice 30.** Soit  $(X_n)_{n \geq 2}$  une suite de va indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre  $\lambda := 1$ . Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\overline{\lim} \frac{X_n}{\log(n)} = 1 \quad \text{ps.}$$

- (1) Pour  $\alpha > 0$  et  $n \geq 2$ , on note  $A_{n,\alpha}$  l'évènement  $\left\{ \frac{X_n}{\log(n)} \geq \alpha \right\}$ . Calculer  $\mathbb{P}(A_{n,\alpha})$ .

- (2) Montrer qu'on a  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_{n,\alpha}) = 0$  pour tout  $\alpha > 1$ , et  $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_{n,\alpha}) = 1$  pour tout  $0 < \alpha \leq 1$ .

- (3) Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ , on a

$$\left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{\log(n)} > \alpha \right\} \subseteq \overline{\lim} A_{n,\alpha} \subseteq \left\{ \overline{\lim} \frac{X_n}{\log(n)} \geq \alpha \right\}.$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 31.** Un singe trouve un ordinateur portable sous un baobab. L'ordinateur est allumé, et un fichier LibreOffice est ouvert. Le singe se met immédiatement à utiliser l'ordinateur. Comme c'est tout de même un singe, il frappe sur les touches complètement au hasard ; et comme il trouve cela très amusant, il tape infiniment longtemps.

(1) On note  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  l'ensemble des touches de l'ordinateur. Pour  $i \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_i$  la  $i$ -ème touche enfoncée par le singe.

(a) Si  $\mathbf{m} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_p})$  est une suite finie d'éléments de  $A$  et si  $k \in \mathbb{N}$  est fixé, quelle est la probabilité de l'évènement  $\{(X_{k+1}, \dots, X_{k+p}) = \mathbf{m}\}$  ?

(b) Soit  $\mathbf{m} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_p})$  fixé. Pour tout entier  $l \in \mathbb{N}$ , on note  $A_l$  l'évènement  $\{(X_{lp+1}, \dots, X_{(l+1)p}) = \mathbf{m}\}$ . Calculer  $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_l)$ .

(2) Montrer qu'il est presque certain que le singe écrive une infinité de fois les oeuvres complètes de Victor Hugo.

**Exercice 32.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de va réelles indépendantes. Montrer qu'on a l'alternative suivante : ou bien la série  $\sum X_n$  converge presque sûrement, ou bien cette série diverge presque sûrement.

**Exercice 33.** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de va réelles indépendantes, et soit  $X$  une va réelle. On suppose que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la va  $X$  est  $\sigma(X_i, i \geq N)$ -mesurable. Montrer que  $X$  est presque sûrement constante.

**Exercice 34.** Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de va indépendantes à valeurs complexes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière  $\sum X_n z^n$  est presque sûrement constant.