Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. On lance 2 dés, et on appelle X la somme des chiffres obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 2. On joue n fois à pile ou face, en misant à chaque fois 1 euro sur "pile". On note G le "gain" obtenu (qui peut être positif ou négatif). Exprimer G en fonction du nombre de "piles" obtenus, puis déterminer la loi de G.

Exercice 3. Soient $p > 1$, et soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\rho(x) := \frac{c}{x^p}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, où $c \in \mathbb{R}^+$.

(1) Déterminer la valeur c pour laquelle ρ est une densité lebesguienne.
(2) Soit X une va réelle telle que $\mathbb{P}_X = \rho(x)dx$. Calculer $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 4. Soit Z une va à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, uniformément distribuée sur $[-1, 2] \times [-1, 1]$. On écrit $Z = (X, Y)$. Calculer $\mathbb{P}(1 - Y \geq 2|X|)$.

Exercice 5. Soit X une va réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Trouver la valeur de T pour laquelle $\mathbb{P}(X \leq T) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit Z une va réelle uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Déterminer la probabilité que le polynôme $P(x) = x^2+x+Z$ admette deux racines réelles distinctes.

Exercice 7. Soit Z une va réelle suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z \geq x) \sim \frac{1}{x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{quand } x \to \infty.$$

Exercice 8. Soit X une va réelle dont la loi $\mathbb{P}_X$ est *diffuse*, *i.e.* $\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $Z := (X, X)$, qui est donc une va à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

(1) Montrer que la loi $\mathbb{P}_Z$ est diffuse.
(2) En observant que $\mathbb{P}_Z$ est portée par la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$, montrer que $\mathbb{P}_Z$ n'est pas une loi à densité.

Exercice 9. Soit Z une va à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$. On écrit $Z = (X, Y)$. Montrer que X et Y sont des va à densité et déterminer leurs densités ρ_X et ρ_Y (en fonction de ρ).

Exercice 10. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(1) Dans cette question, on suppose que X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in [0, 1]$, *i.e.* $\mathbb{P}(X = k) = p\,(1-p)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathbb{P}(X \geq n+1 \,|\, X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq 1).$$

(2) Dans cette question, on veut établir la réciproque de (1). On suppose donc que $(*)$ est vérifiée, et il s'agit de montrer que X suit une loi géométrique.
   (a) On pose $p := \mathbb{P}(X = 0)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^n$.
   (b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 11. Montrer que si X est une va réelle à densité et si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, alors $aX + b$ suit la loi $\frac{1}{|a|}\rho_X\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$. En déduire que

- si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$;
- Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et si $a > 0$, alors aX suit la loi $\mathcal{E}(\lambda/a)$.

Exercice 12. Soit $a > 0$, et soit X une va à valeurs dans $]0, a[$, uniformément distribuée sur $]0, a[$. Soit également $b > 0$. Déterminer la loi de $Y = b\log(a/X)$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $c > 0$ la fonction $\rho_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\rho_c(x) := c\,x^{c-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ est une densité lebesguienne. Montrer ensuite que si X est une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \rho_c(x)dx$, alors la loi de $Y := -c\log(X)$ ne dépend pas de c.

Exercice 14. Soit X une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx$. Justifier que $Y := 1/X$ est une va bien définie, et déterminer la loi de Y.

Exercice 15. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$, *i.e.* $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de $Y := \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

Exercice 16. Soit $\alpha : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive qui n'est pas presque partout égale à 0, et vérifie de plus $\int_0^\infty r\alpha(r^2)\,dr < \infty$.

(1) Montrer qu'on définit une densité lebesguienne sur $\mathbb{R}^2$ en posant $\rho(x, y) := c\,\alpha(x^2 + y^2)$, où c est une constante à déterminer.

(2) Montrer que si Z est une va à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathbb{P}_Z = \rho(x,y)dxdy$, alors $\mathbb{P}_Z$ est *invariante par isométries* : pour toute isométrie linéaire $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{P}_{\Phi(Z)} = \mathbb{P}_Z$.

Exercice 17. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. Montrer que si f et g sont des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$, alors les va $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exercice 18. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que X est **symétrique**, ce qui signifie que $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_X(-A)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Soit également ε une va à valeur dans $\{-1, 1\}$ et indépendante de X. Montrer que $Y := \varepsilon X$ a la même loi que X.

Exercice 19. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivant une loi de Rademacher ($\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1)$). On pose $X_1 := \varepsilon_2\varepsilon_3$, $X_2 := \varepsilon_3\varepsilon_1$ et $X_3 := \varepsilon_1\varepsilon_2$. Montrer que X_1, X_2, X_3 suivent chacune une loi de Rademacher, qu'elles sont deux à deux indépendantes, mais qu'elles ne sont pas indépendantes.

Exercice 20. Soit $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivant une loi de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n := \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$. Montrer que les va w_n sont indépendantes.

Exercice 21. Soit X une va réelle à densité, et soit Y une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On supose que X et Y sont indépendantes. Montrer que la va $Z := \frac{X}{Y}$ est à densité.

Exercice 22. Soit X une va à valeurs dans un espace métrique complet séparable (Λ, d). On suppose que X est indépendante d'elle même. Le but de l'exercice est de montrer que X est presque sûrement constante, autrement dit qu'il existe un point $a \in \Lambda$ tel que $X = a$ ps.

(1) Montrer que pour tout borélien $A \subseteq \Lambda$, on a $\mathbb{P}(X \in A) = 0$ ou 1.
(2) Montrer que X est réunion dénombrable de boules ouvertes, et en déduire qu'il existe une boule ouverte $B_0 \subseteq \Lambda$ telle que $\mathbb{P}(X \in B_0) = 1$.
(3) Montrer que si B est une boule ouverte de Λ telle que $\mathbb{P}(X \in B) = 1$, alors il existe une boule ouverte B' telle que $\overline{B}' \subseteq B$, $\operatorname{diam}(\overline{B}') \leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\overline{B})$ et $\mathbb{P}(X \in B') = 1$.
(4) Conclure.

Exercice 23. Soient X et Y deux va réelles indépendantes, et soient f et g deux fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$. On suppose que la va $f(X)+g(Y)$ est (presque sûrement) constante. Montrer que les va $f(X)$ et $g(Y)$ sont presque sûrement constantes.

Exercice 24. (problème de l'aiguille de Buffon)
On jette au hasard une aiguille de longueur l sur un parquet composé de planches parallèles ayant la même largeur $d > l$. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité p que l'aiguille tombe à cheval sur une des rainures du parquet.

(1) On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la rainure du parquet la plus proche, et Θ l'angle aigu entre l'aiguille et la direction des rainures. Ainsi, on a $0 \leq Y < \frac{d}{2}$ et $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$· Montrer que l'aiguille tombe à cheval sur une rainure si et seulement si $Y < \frac{l}{2} \sin \Theta$.
(2) Déterminer la probabilité p en supposant que (Y, Θ) est uniformément distribuée sur $[0, \frac{d}{2}[\times[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 25. (indépendance et "courbes de Peano")
Soit τ une va à valeurs dans un intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}$, et uniformément distribuée sur I. Soient également x et y deux fonctions continues sur I, à valeurs réelles. On suppose que les va $x(\tau)$ et $y(\tau)$ sont indépendantes.

(1) Soient $u \in x(I)$ et $v \in y(I)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\mathbb{P}\big(|x(\tau) - u| < \varepsilon \text{ , } |y(\tau) - v| < \varepsilon\big) > 0.$$
(2) Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\gamma(t) := (x(t), y(t))$. Montrer que $\gamma(I)$ est le rectangle $x(I) \times y(I)$. (Ainsi, $\gamma(I)$ est une "courbe continue qui remplit un rectangle".)

Exercice 26. Soit X une va réelle. Déterminer la fonction de répartition de X dans les cas suivants.

(i) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
(ii) X soit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* $\mathbb{P}_X = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\, dx$.
(iii) X suit la loi de Cauchy, $\mathbb{P}_X = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx$.

Exercice 27. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$, et soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := 0$ si $x < a$, $F(x) := \frac{1}{3}$ si $a \leq x < b$ et $F(x) := 1$ si $x \geq b$. Montrer que F est la fonction de répartition d'un va réelle X, et déterminer la loi de X.

Exercice 28. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i},\infty[}(x)$. Montrer que F est la fonction de répartition d'un va réelle X, et calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(X < 0)$.

Exercice 29. Soit X une va réelle. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}_X(\{a\}) = F_X(a) - F_X(a^-)$. En particulier, F_X est continue si et seulement si $\mathbb{P}_X$ est une mesure diffuse.

Exercice 30. Soit X une va réelle. On suppose que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus F$, où F est un ensemble fini. Montrer que X est une va à densité.

Exercice 31. Soit X une va réelle. On suppose que pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \in A) = 0$ ou 1. Montrer que F_X est une fonction indicatrice, et en déduire que X est presque sûrement constante (autrement dit, qu'il existe un nombre réel c tel que $X = c$ ps).

Exercice 32. Soit X une va réelle positive telle que $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.

(1) Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* $\mathbb{P}_X = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x) dx$. Montrer que la propriété suivante est vérifiée :

$$(*) \qquad \forall s, t > 0 \ : \ \mathbb{P}(X > s + t \,|\, X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

(2) Dans cette question, on veut établir la réciproque de (1). On suppose donc que $(*)$ est vérifiée, et on cherche à montrer que X suit une loi exponentielle.
   (a) Pour $t > 0$, on pose $f(t) := -\log \mathbb{P}(X > t)$. Montrer que f vérifie l'équation fonctionnelle $f(t + s) = f(t) + f(s)$.
   (b) En déduire que f est de la forme $f(t) = \lambda t$, pour une certaine constante λ. On a ainsi $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t > 0$.
   (c) Conclure.

Exercice 33. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. On pose $M := \max(X, Y)$ et $m := \min(X, Y)$

(1) Exprimer les fonctions de répartition de M et m en fonction de celles de X et de Y.
(2) Déduire de (1) que si X et Y admettent des densités continues, alors M et m également, et donner des formules pour ces densités.
(3) Dans cette question, on suppose que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ. Calculer explicitement la fonction de répartition de $m = \min(X, Y)$, et en déduire la loi de m.

Exercice 34. (fonctions génératrices)
Si X est une va *à valeurs dans* $\mathbb{N}$, la **fonction génératrice de** X est la fonction $G_X : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, s^k.$$

(1) Justifier la définition, et montrer que G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

(2) Montrer que *la fonction génératrice détermine la loi* : si X_1 et X_2 sont deux va telles que $G_{X_1} = G_{X_2}$, alors $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$.

(3) Calculer G_X dans les cas suivants :

(i) X suit une loi de Bernoulli de paramètre p;

(ii) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$;

(iii) X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

(4) Montrer que si X et Y sont des va indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X \, G_Y$.

(5) Établir les résultats suivants :

(a) si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois de Poison $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$;

(b) si $X_1, \ldots, X_n$ sont des va indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.