Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

(topologie)

Exercice 1. Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$. Montrer que f est continue si et seulement si $\forall A \subseteq X \ : \ f(\,\overline{A}\,) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 2. Montrer que si X est un ensemble quelconque, alors la topologie discrète sur X est complètement métrisable.

Exercice 3. Montrer si X est un espace topologique séparé, alors tout ensemble fini $F \subseteq X$ est fermé dans X.

Exercice 4. Soit X un espace vectoriel, et soit $\| \cdot \|$ une semi-norme sur X. Montrer que la topologie définie par $\| \cdot \|$ est séparée si et seulement si $\| \cdot \|$ est une norme.

Exercice 5. Montrer que si X un espace métrisable séparable, alors il existe un *plus grand ouvert dénombrable* $O \subseteq X$. En déduire que si X est non dénombrable, alors il existe un fermé $F \subseteq X$ tel que $F \neq \emptyset$ et F est sans point isolé.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que X est séparable si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble dénombrable $D_\varepsilon \subseteq X$ tel que $\bigcup_{z \in D_\varepsilon} B(z, \varepsilon) = X$.

Exercice 7. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) X est séparable.

(ii) Il existe un ensemble dénombrable $D \subseteq X$ tel que $\mathrm{vect}(D)$ est dense dans X.

(iii) Il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de X de dimension finie telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dense dans X.

Exercice 8. Montrer que les espaces $c_0(\mathbb{N})$ et $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ sont séparables.

Exercice 9. Soit X un espace topologique séparable. Montrer que si $\mathcal{O}$ est une famille d'ouverts non vides de X deux à deux disjoints, alors $\mathcal{O}$ est nécessairement dénombrable.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints telle que $m(E_i) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que l'espace $L^\infty(\Omega, m)$ n'est pas séparable. (*Trouver une famille non dénombrable de boules ouvertes deux à deux disjointes et utiliser l'Exercice 9.*)

Exercice 11. Soit $X := c_0(\mathbb{N})$ ou $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\mathcal{L}(X)$ n'est pas séparable.

Exercice 12. On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on pose $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) := \big\{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R});\ f(x) \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty\big\}$. Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas séparable, mais que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est séparable.

Exercice 13. Montrer que si (K, d) est un espace métrique compact, alors l'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ est séparable. (*Soit* $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *un ensemble dénombrable dense dans* K*. Considérer les fonctions* f_n *définies par* $f_n(x) := d(x, x_n)$*, et utiliser le Théorème de Stone - Weierstrass.*)

Exercice 14. Soit K un espace topologique compact. Montrer que si l'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ est séparable, alors K est métrisable.

Exercice 15. Soit Ω un espace métrisable séparable, et soit m une mesure borélienne sigma-finie sur Ω. Soit également $1 \leq p < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que l'espace $L^p(\Omega, m)$ est séparable.

(1) Dans cette question, on suppose que la mesure m est finie. Comme Ω est métrisable, il est alors "bien connu" que la mesure m est **régulière** : pour tout borélien $A \subseteq \Omega$, on a $m(A) = \inf\big\{m(O);\ O \text{ ouvert},\ O \supseteq A\big\}$.
  - (a) Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable pour la topologie de Ω. Montrer que pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble fini $I \subseteq \mathbb{N}$ tel que $m\big(A\Delta \bigcup_{i\in I} B_i\big) < \varepsilon$.
  - (b) Déduire de (a) qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D}$ de boréliens de Ω telle que $\mathbf{1}_A \in \overline{\{\mathbf{1}_E;\ E \in \mathcal{D}\}}^{L^p}$ pour tout borélien $A \subseteq \Omega$.
  - (c) Montrer que $L^p(\Omega, m)$ est séparable.

(2) Démontrer le résultat souhaité pour une mesure m sigma-finie.

Exercice 16. Soit Ω un espace topologique métrisable séparable.

(1) Montrer que si m est une mesure borélienne positive sur Ω, alors il existe une *plus grand* ouvert $O \subseteq \Omega$ tel que $m(O) = 0$. Le complémentaire de cet ouvert s'appelle le **support** de la mesure m, et se note $\mathrm{supp}(m)$.

(2) Avec les notations de (1), montrer qu'un point $x \in \Omega$ appartient à $\mathrm{supp}(m)$ si et seulement si $m(V) > 0$ pour tout voisinage V de x.
(3) Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de points de Ω, et soit (a_i) une suite de nombres réels strictement positifs. Déterminer le support de la mesure $m := \sum_i a_i\delta_{x_i}$.

Exercice 17. Soit Ω un espace polonais, et soit μ une mesure borélienne finie sur Ω. Comme Ω est métrisable, on sait que la mesure μ et régulière; donc, pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un fermé F de Ω tel que $F \subseteq A$ et $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout borélien $A \subseteq \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un *compact* $K \subseteq A$ tel que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

(1) Soit d une distance sur Ω définissant la topologie de Ω. Soit également $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un ensemble $F_n \subseteq \Omega$ qui est réunion d'un nombre fini de boules fermées de rayon ε et tel que $\mu(\Omega \setminus F_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. (*Utiliser la séparabilité de Ω; cf l'Exercice 6.*)
(2) En utilisant (1), démontrer le résultat souhaité pour $A := \Omega$.
(3) Démontrer le résultat souhaité pour un borélien A quelconque.

Exercice 18. Trouver une suite généralisée $(x_p)_{p\in P} \subseteq \mathbb{R}$ qui soit convergente mais pas bornée.

Exercice 19. Soit $(x_p)_{p\in P}$ une suite généralisée dans un ensemble X. Montrer que toute sous-s.g. d'une sous-s.g. de (x_p) est une sous-s.g. de (x_p).

Exercice 20. Soit $(x_p)_{p\in P}$ une suite généralisée dans un espace topologique X, et soit $a \in X$. Montrer que $x_p \to a$ si et seulement si toute sous-s.g. de (x_p) a une sous-s.g. qui converge vers a.

Exercice 21. Soit $(x_p)_{p\in P}$ une suite généralisée dans un espace topologique X. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_p) est égal à $\bigcap_{p\in P} \overline{\{x_q;\ q \succeq p\}}$.

Exercice 22. Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$. Montrer que si le graphe de f est compact, alors f est continue.

Exercice 23. Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite généralisée $(x_p)_{p\in P}$ dans X est **de Cauchy** si : $\forall\varepsilon > 0\ \exists p_\varepsilon \in P\ \forall p, p' \geq p_\varepsilon\ :\ d(x_p, x_{p'}) < \varepsilon$. Montrer que si (X, d) est complet, alors toute suite généralisée de Cauchy $(x_p) \subseteq X$ est convergente.

Exercice 24. Soit X un espace de Banach, et soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que la suite (x_i) est **sommable** si la suite généralisée $\big(\sum_{i\in F} x_i\big)_{F\in\mathcal{P}_f(\mathbb{N})}$ converge dans X.

(1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   (a) La suite (x_i) est sommable.
   (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble fini $F \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\|\sum_{i\in I} x_i\| < \varepsilon$ pour tout $I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ vérifiant $I \cap F = \emptyset$.
   (b') Il n'est pas possible de trouver $\varepsilon > 0$ et une suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties finies de $\mathbb{N}$ avec $\max I_k < \min I_{k+1}$ pour tout k, tels que $\|\sum_{i\in I_k} x_i\| \geq \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(i)}$ est convergente.
   (d) Pour toute suite strictement croissante d'entiers $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série $\sum x_{i_n}$ est convergente.

(2) Montrer que si la série $\sum \|x_i\|$ est convergente, alors la suite (x_i) est sommable.

(3) Dans cette question, on supose que X est de dimension finie. Montrer que la suite (x_i) est sommable *si et seulement si* la série $\sum \|x_i\|$ est convergente.

(4) Montrer que le résultat de (3) est faux si X est un espace de Hilbert de dimension infinie.

Exercice 25. Soient X et K deux espaces topologiques, avec K compact. Montrer que si $C \subseteq X \times K$ est fermé dans l'espace produit $X \times K$, alors l'ensemble $\pi_X(C) := \{x \in X;\ \exists z \in K\ :\ (x, z) \in C\}$ est fermé dans X.

Exercice 26. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que $\prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si tous les X_i sont connexes.

Exercice 27. Soit I un ensemble non dénombrable. On munit $\{0,1\}^I$ de la topologie produit.

(1) Soit $\mathcal{A} := \{\mathbf{1}_F;\ F \in \mathcal{P}_f(I)\} \subseteq \{0,1\}^I$. Montrer que la fonction constante $\mathbf{1}$ appartient à $\overline{\mathcal{A}}$.

(2) Montrer que $\{0,1\}^I$ n'est pas métrisable.

Exercice 28. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'espaces métrisables séparables, et soit $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$. Montrer que la tribu borélienne $\mathfrak{B}(\Omega)$ est la tribu produit des tribus $\mathfrak{B}(\Omega_i)$.

Exercice 29. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'espaces topologiques séparables, indexée par $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer que $X := \prod_{t\in\mathbb{R}} X_t$ est séparable.

(1) On note Σ l'ensemble constitué par toutes les suites finies σ de la forme $\sigma = (J_1, \dots, J_r, n_1, \dots, n_r)$ où : $J_1, \dots, J_r$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ à extrémités rationnelles deux à deux disjoints et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$. Justifier que Σ est dénombrable.

(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $D_t = \{z_{t,n};\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans X_t. Soit aussi $b \in X$ fixé. Pour toute $\sigma = (J_1, \dots, J_r, n_1, \dots, n_r) \in \Sigma$, on définit $f_\sigma \in X$ comme suit : $f_\sigma(t) := z_{t,n_i}$ si $t \in J_i$ pour un certain i, et $f_\sigma(t) := b_t$ sinon. Montrer que l'ensemble $\{f_\sigma;\ \sigma \in \Sigma\}$ est dense dans X.

Exercice 30. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs complexes, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

(1) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ telle que : $f_n \neq 0$ pour tout n, et $\lambda_n f_n \to 0$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour toute suite $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$. (*Poser* $f_n(x) := \mathrm{dist}(x, K_n)$, *où* (K_n) *est une suite bien choisie de compacts de* Ω.)

(2) Montrer que la topologie de $\mathcal{C}(\Omega)$ ne peut pas être définie par une norme.

Exercice 31. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω, muni de la convergence uniforme sur tout compact.

(1) Montrer que $H(\Omega)$ est un espace polonais.

(2) Montrer que la topologie de $H(\Omega)$ ne peut pas être définie par une norme. (*Utiliser le Théorème de Montel.*)

Exercice 32. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}(X)$ est un ensemble borné, alors l'application $(S, T) \mapsto ST$ est continue de $(\mathcal{B}, \mathtt{SOT}) \times (\mathcal{L}(X), \mathtt{SOT})$ dans $(\mathcal{L}(X), \mathtt{SOT})$ et l'application $(T, x) \mapsto Tx$ est continue de $(\mathcal{B}, \mathtt{SOT}) \times X$ dans X.

Exercice 33. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que les opérateurs de rang fini sont $\mathtt{SOT}$-denses dans $\mathcal{L}(X)$.

Exercice 34. Soit X un espace de Banach séparable. On note $B_{\mathcal{L}(X)}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(X)$, et on munit $B_{\mathcal{L}(X)}$ de la topologie $\mathtt{SOT}$.

(1) Soit $D = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans X, et soit $J : B_{\mathcal{L}(X)} \to X^{\mathbb{N}}$ l'application définie par $J(T) := \big(Tz_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que J est continue et injective, et que $J^{-1} : J\big(B_{\mathcal{L}(X)}\big) \to B_{\mathcal{L}(X)}$ est continue. Ainsi, $B_{\mathcal{L}(X)}$ est homéomorphe à $J(B_{\mathcal{L}(X)})$.

(2) Montrer que pour tout $\bar{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, on a l'équivalence suivante :

$$\bar{x} \in J\big(B_{\mathcal{L}(X)}\big) \iff \forall N\ \forall a_0, \dots, a_N \in \mathbb{K} \ : \ \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n z_n \right\| .$$

(3) Montrer que $\big(B_{\mathcal{L}(X)}, \mathtt{SOT}\big)$ est un espace polonais.

Exercice 35. Montrer qu'on définit une topologie sur $\mathbb{R}$ en décrétant que les fermés sont $\mathbb{R}$ et les ensembles finis. Montrer que cette topologie possède la propriété de Borel-Lebesgue, mais n'est pas séparée.

Exercice 36. Soit Ω un ensemble non vide, et soit K un compact d'un espace vectoriel normé X. Soit également $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X, et soit $(\Lambda_i)_{i\in I}$ une famille de parties finies de Ω. On suppose que pour tout ensemble fini $J\subseteq I$, il existe une application $f_J : \Omega\to K$ telle que $\forall i\in J\;:\;\sum_{x\in\Lambda_i} f_J(x)\in F_i$. Montrer qu'il existe une application $f:\Omega\to K$ telle que $\forall i\in I\;:\;\sum_{x\in\Lambda_i} f(x)\in F_i$.

Exercice 37. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $e_n : [0,2\pi]\to\mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(t) := e^{int}$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-s.g. qui converge simplement sur $[0,2\pi]$, mais que (e_n) ne possède aucune *sous-suite* simplement convergente. (*Pour la 2ème partie, raisonner par l'absurde. En supposant qu'il existe une sous-suite* (e_{n_k}) *de* (e_n) *convergeant simplement vers une fonction* f*, considérer les intégrales* $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-in_kt}dt$.)

Exercice 38. Soit Δ l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathbf{Q}$ l'ensemble des "rationnels de Δ", *i.e.* $\mathbf{Q} := \{\alpha\in\Delta;\ \alpha_i = 0$ à partir d'un certain rang$\}$. Montrer que $\mathbf{Q}$ est dense dans Δ.

Exercice 39. Soit K un espace topologique compact. On suppose que tout point $x\in K$ possède une base de voisinages formée d'ensembles ouverts fermés. Montrer que l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}(K)$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est dense dans $\mathcal{C}(K)$.

Exercice 40. On pose $E_1 := [0,1/3]\cup[2/3,1]$, $E_2 := [0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$, et ainsi de suite. Montrer que l'ensemble $K_3 := \bigcap_{n\geq 1} E_n$ est homéomorphe à l'espace de Cantor $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. (*Considérer l'application* $J:\Delta\to\mathbb{R}$ *définie par* $J(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\alpha_i}{3^{i+1}}\cdot$ *l'Exercice 38 pourra être utile.*)

Exercice 41. On note Δ l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1, et pour $s\in\mathcal{S}$, soit $W_s := \{\alpha\in\Delta;\ \alpha$ commence par $s\}$. Montrer *sans* utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{W_s}$, $s\in\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{C}(\Delta)$; et en déduire que si K est un espace métrique compact quelconque, alors l'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ est séparable.

Exercice 42. Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé X. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une surjection continue $F:[0,1]\to K$.

(1) Soit E un compact de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$, avec $0 \in E$ et $1 \in E$. Montrer que si $f : E \to K$ est une application continue, alors f se prolonge en une application continue $F : [0,1] \to K$. (*On pourra utiliser le fait que* $[0,1] \setminus E$ *est réunion d'une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*)

(2) On note Δ l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que l'application $J : \Delta \to \mathbb{R}$ définie par $J(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\alpha_i}{3^{i+1}}$ est continue et injective.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 43. Soient X un espace de Banach, Y un evn et $T : X \to Y$ une application linéaire. On suppose que T est borélienne. Le but de l'exercice est de montrer que T est continue. Pour cela, on va raisonner par l'absurde : on suppose que T n'est pas continue, et on cherche à obtenir une contradiction.

(1) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ telle que $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ et $\|Tx_n\| > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := \{x \in X;\ \|Tx\| > n/2\}$. Justifier que les A_n sont des boréliens de X, et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$X = A_n \cup (A_n + x_n).$$

(3) Soit $\Delta := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pour $\alpha \in \Delta$, on pose $\Phi(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_i$. Justifier la définition, et montrer que l'application $\Phi : \Delta \to X$ est continue (donc borélienne).

(4) Soit $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ une suite de variable aléatoires indépendantes prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilité 1/2. On considère $\bar{\varepsilon}$ comme une variable aléatoire à valeurs dans Δ. (Il y a une subtilité; *cf* l'Exercice 28.) En utilisant (2), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) \leq \mathbb{P}\big(\Phi(\varepsilon) \in A_n\big) + \mathbb{P}\big(\Phi(\bar{\varepsilon}^n) \in A_n\big),$$
où $\bar{\varepsilon}^n$ est la variable aléatoire $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, 1-\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots)$. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \mathbb{P}\big(\Phi(\varepsilon) \in A_n\big) \geq 1/4.$$

(5) Déduire de (4) qu'il existe un $x \in X$ appartenant à une infinité de A_n, et conclure.

Exercice 44. Démontrer le Théorème de Banach-Steinhaus en adaptant la méthode de l'Exercice 43.

Exercice 45. Le but de l'exercice est de montrer que tout espace polonais X est image continue de l'espace $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, *i.e.* il existe une surjection continue $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$.

(1) Soit d une distance définissant la topologie de X telle que (X,d) soit complet et $\mathrm{diam}(X) \leq 1$. En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites finies d'entiers, montrer qu'il existe une famille $(V_s)_{s\in S}$ d'ouverts de X vérifiant les propriétés suivantes :

- $V_\emptyset = X$;
- $\forall s \in \mathcal{S}\ :\ \mathrm{diam}(V_s) \leq 2^{-|s|}$, où $|s|$ est la longueur de s;
- $\forall s \in \mathcal{S}\ :\ V_s = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{V_{si}}$, où si est la suite "s suivie de i".

(2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)}$ est non vide et réduite à 1 point $\{x_\alpha\}$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.