Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 6

(spectre)

Exercice 1. Soit $H := \ell^2(\mathbb{N})$. Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on note $\Delta_a : H \to H$ l'opérateur diagonal associé. Déterminer les valeurs propres de Δ_a, puis le spectre de Δ_a.

Exercice 2. Soit $H := \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\sigma(T) = K$.

Exercice 3. Soit $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée de nombres strictement positifs. On note $B_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et $S_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ les opérateurs définis par $B_{\mathbf{w}}(x_0, x_1, x_2 \dots) := (w_1x_1, w_2x_2 \dots)$ et $S_{\mathbf{w}}(x_0, x_1, \dots) := (0, w_1x_0, w_2x_1, \dots)$.

(1) Exprimer le rayon spectral de $B_{\mathbf{w}}$ en fonction des w_n.

(2) On suppose que w_n admet une limite $r_{\mathbf{w}}$ quand $n \to \infty$. Montrer que tout nombre complexe λ vérifiant $|\lambda| < r_{\mathbf{w}}$ est valeur propre de $B_{\mathbf{w}}$; et en déduire que $\sigma(B_{\mathbf{w}})$ est le disque $\overline{D}(0, r_{\mathbf{w}})$.

(3) Déterminer $\sigma(S_{\mathbf{w}})$ lorsque la suite (w_n) converge. L'opérateur $S_{\mathbf{w}}$ possède-t-il des valeurs propres?

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré, et soit $\phi \in L^\infty = L^\infty(\Omega, m)$. Montrer que $\sigma_{L^\infty}(\phi)$ est le plus petit fermé $K \subseteq \mathbb{C}$ tel que $\phi(t) \in K$ pp.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré, et soit $\phi \in L^\infty = L^\infty(\Omega, m)$. On note $M_\phi : L^2 \to L^2$ l'opérateur de multiplication associé. Montrer qu'un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l'ensemble $\{t \in \Omega;\ \phi(t) = \lambda\}$ est de mesure non-nulle.

Exercice 6. Soit K un espace topologique compact, et soit $\phi \in \mathcal{C}(K)$. On note $M_\phi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ l'opérateur défini par $M_\phi(f) := \phi f$.

(1) Montrer qu'on a $\sigma(M_\phi) = \phi(K)$.

(2) Montrer qu'un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l'ensemble $\{t \in K;\ \phi(t) = \lambda\}$ est d'intérieur non-vide dans K.

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ n'est pas surjectif.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Montrer que si $\sigma(T)$ est un singleton $\{\lambda\}$, alors $T = \lambda I$.

Exercice 9. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint vérifiant $\|T\| \leqslant 2$. Montrer qu'on a $\|T^4 - 4T - 12I\| \leqslant 15$.

Exercice 10. On note B et S le "backward shift" et le "forward shift" sur $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que $\sigma_p(B) = \mathbb{D}$ (le disque unité ouvert) et $\sigma(B) = \sigma_{ap}(B) = \overline{\mathbb{D}}$; puis que $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, $\sigma_{ap}(S) = \mathbb{T}$ et $\sigma_p(S) = \varnothing$.

Exercice 11. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soient également X_1 et X_2 deux sous-espaces fermés de X non réduits à $\{0\}$, stables par T et tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Montrer qu'on a $\sigma(T) = \sigma(T_{|X_1}) \cup \sigma(T_{|X_2})$.

Exercice 12. Soit X un espace de Banach complexe, et soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$. On supppose qu'on a $AB = I$ et $BA \neq I$.

(1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a
$$(A - \lambda I)B(I - \lambda B)^{-1} = I \quad \text{et} \quad B(I - \lambda B)^{-1}(A - \lambda I) \neq I.$$
En déduire que si $I - \lambda B$ est inversible, alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

(2) Montrer que $\sigma(A)$ contient le disque $D(0, 1/r(B))$, et que $\sigma(B)$ contient le disque $D(0, 1/r(A))$.

Exercice 13. Soit A une algèbre de Banach avec unité.

(1) Soient a, b tels que $\|a\| < 1$ et $\|b\| < 1$. Montrer que $\mathbf{1} - ab$ et $\mathbf{1} - ba$ sont inversibles dans A, et exprimer $(\mathbf{1} - ba)^{-1}$ en fonction de a, b et $(\mathbf{1} - ab)^{-1}$.

(2) Soient $a, b \in A$ quelconques. Montrer que $\mathbf{1} - ab$ est inversible si et seulement si $\mathbf{1} - ba$ est inversible.

(3) Montrer que si $a, b \in A$, alors $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$ et $r(ab) = r(ba)$.

(4) A-t-on toujours $\sigma(ab) = \sigma(ba)$?

Exercice 14. Soit A une algèbre normée unitaire, et soit $u \in A$. On suppose que $\mathbf{1} - u$ est inversible. Montrer que si $\|u\| < 1$, alors $\|(\mathbf{1} - u)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|u\|}$, et que si $\|u\| > 1$, alors $\|(\mathbf{1} - u)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\|u\| - 1}$.

Exercice 15. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) Montrer qu'on a $r(T) < 1$ si et seulement si $\|T^n\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

(2) Montrer que si $T^n x \to 0$ pour tout $x \in X$, alors $r(T) \leqslant 1$; mais qu'on n'a pas forcément $r(T) < 1$ dans ce cas.

Exercice 16. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'on a $\sigma(T) \cap \overline{\mathbb{D}} = \varnothing$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = +\infty$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 17. (formule du rayon spectral en dimension finie)
Dans cet exercice, on donne deux démonstrations "élémentaires" de la formule du rayon spectral pour $\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$.

(1) Montrer qu'il suffit d'établir le résultat suivant : *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ vérifie $r(T) < 1$, alors $T^n \to 0$ quand $n \to \infty$.*

(2) (1ère méthode) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une base $\mathbf{g} = (g_1, \dots g_d)$ de $\mathbb{C}^d$ telle que la matrice $M = (a_{ij})$ de T dans la base $\mathbf{g}$ est triangulaire supérieure, avec de plus $|a_{ij}| < \eta$ pour $i < j$. (*Chercher $\mathbf{g}$ sous la forme $\mathbf{g} = (\alpha_1 f_1, \dots, \alpha_d f_d)$, où $(f_1, \dots, f_d)$ est une base trigonalisant T*).

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme $\| \cdot \|_\varepsilon$ sur $\mathbb{C}^d$ telle que $|||T|||_\varepsilon < r(T) + \varepsilon$, où $||| \cdot |||_\varepsilon$ est la norme associée sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

(3) (2ème méthode) Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ vérifiant $r(T) < 1$. En utilisant la décomposition "$D + N$", montrer directement que $T^n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 18. (rayon spectral sans analyse complexe)
Soit X un espace de Banach complexe. Le but de l'exercice est de démontrer la formule du rayon spectral pour $\mathcal{L}(X)$ sans utiliser la théorie des fonctions holomorphes. On fixe donc un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, on note $r(T)$ le rayon spectral de T, et on cherche à montrer que $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ (on tient pour acquis que la limite existe). Dans ce qui suit, on pose $\nu := \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ et $C_\nu := \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| \geqslant \nu\}$.

(1) Rappeler pourquoi on a $r(T) \leqslant \nu$.

(2) Montrer que si $\nu = 0$, alors T n'est pas inversible. En déduire la formule dans ce cas.

(3) On suppose que $\nu > 0$, et qu'il n'existe aucun nombre $\lambda \in \sigma(T)$ vérifiant $|\lambda| = \nu$.

(a) Pour $\lambda \in C_\nu$, on pose $\phi(\lambda) = (I - \lambda^{-1}T)^{-1}$. Justifier la définition, et montrer que la fonction ϕ est *uniformément continue* sur C_ν.

(b) Montrer que pour tout $\lambda \in C_\nu$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, l'opérateur $I - (\lambda^{-1}T)^n$ est inversible. (*Factoriser le polynôme $P(z) := 1 - (\lambda^{-1}z)^n$*).

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

(i) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, calculer $\sum_{\omega \in \Gamma_n} \omega^k$.

(ii) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $\omega \in \Gamma_n$, on a

$$I - (\lambda^{-1}T)^n = (I - (\omega\lambda)^{-1}T)\Big(I + (\omega\lambda)T + \cdots + (\omega\lambda)^{n-1}T\Big).$$

(iii) Déduire de (i) et (ii) que pour tout $\lambda \in C_\nu$, on a

$$\big(I - (\lambda^{-1}T)^n\big)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{\omega \in \Gamma_n} \phi(\omega\lambda).$$

(d) En utilisant (a) et (c), montrer que $(I - (\lambda^{-1}T)^n)^{-1} \to (I - (\nu^{-1}T)^n)^{-1}$ quand $\lambda \in C_\nu$ tend vers ν, *uniformément* par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) Montrer que si $|\lambda| > \nu$, alors $(\lambda^{-1}T)^n \to 0$ quand $n \to \infty$. En déduire, à l'aide de (d), que $(\nu^{-1}T)^n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, puis obtenir une contradiction.

(4) Conclure.

Exercice 19. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit également $\varepsilon > 0$. Pour $x \in X$, on pose

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|T^n x\|}{(r(T) + \varepsilon)^n}.$$

(1) Justifier la définition, puis montrer que $\|\cdot\|_\varepsilon$ est une norme équivalente à la norme originelle de X.

(2) On note encore $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme sur $\mathcal{L}(X)$ associée à $\|\cdot\|_\varepsilon$. Montrer qu'on a $\|T\|_\varepsilon \leqslant r(T) + \varepsilon$.

(3) Montrer qu'il existe un opérateur inversible $J : X \to X$ tel que $\|JTJ^{-1}\| < r(T) + \varepsilon$.

Exercice 20. Soit A une algèbre de Banach complexe avec unité.

(1) Montrer que l'ensemble $\{(a, \lambda) \in A \times \mathbb{C};\ \lambda \in \sigma(a)\}$ est une partie fermée de $A \times \mathbb{C}$.

(2) En déduire que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A telle que $a_n \to a \in A$, alors

$$\varlimsup_{n \to \infty} r(a_n) \leqslant r(a).$$

(3) Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 21. Soit A une algèbre de Banach unitaire. Montrer que pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'ensemble $\{a \in A;\ \sigma(a) \subseteq \Omega\}$ est un ouvert de A.

Exercice 22. Soit A une algèbre de Banach complexe avec unité. Montrer que si $a, b \in A$ commutent (*i.e.* $ab = ba$), alors

$$r(ab) \leqslant r(a)r(b) \quad \text{et} \quad r(a+b) \leqslant r(a) + r(b).$$

(*Pour la 2ème inégalité, observer d'abord que pour tous α, β tels que $\alpha > r(a)$ et $\beta > r(b)$, on peut trouver une constante C telle que $\forall m \in \mathbb{N}\ :\ \|a^m\| \leqslant C\alpha^m$ et $\|b^m\| \leqslant C\beta^m$.*)

Exercice 23. Soit X un espace de Banach complexe.

(1) Montrer que si $A \in \mathcal{L}(X)$ et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $r((A-\lambda I)^{-1}) = \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))}$.

(2) En déduire, à l'aide l'exercice 22, que si $A, B \in \mathcal{L}(X)$ commutent, si $\lambda \notin \sigma(A)$ et si $\|B - A\| < \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(A))$, alors $\lambda \notin \sigma(B)$.

(3) Soit $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X)$ une suite convergeant vers un opérateur T. On suppose qu'on a $TT_n = T_nT$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  (a) En utilisant (2), montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T_n)) = 0$.

  (b) Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} r(T_n) = r(T)$.

Exercice 24. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) On suppose qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(T) = 0$. Montrer que $\sigma(T)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P (noté $Z(P)$), et que si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash Z(P)$, alors on peut trouver un polynôme B_λ tel que $\deg(B_\lambda) < \deg(P)$ et $(T - \lambda I)^{-1} = B_\lambda(T)$.

(2) On suppose que T est une projection, avec $T \neq 0$ et $T \neq I$. Déterminer $\sigma(T)$ et donner une formule pour $(T - \lambda I)^{-1}$ si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$.

Exercice 25. Pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on définit une fonction $Tf : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Tf(0) := 0$ et $Tf(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\, dy$ pour $x > 0$.

(1) Justifier la définition et montrer que Tf est continue pour toute $f \in \mathcal{C}([0,1])$; puis montrer que T est un opérateur borné sur $\mathcal{C}([0,1])$ et calculer $\|T\|$.

(2) Montrer que tout nombre $\lambda \in]0, \pi/2]$ est valeur propre de T, et en déduire le rayon spectral de T. (*Montrer d'abord qu'on peut écrire $\lambda = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^r d\theta$, pour un certain $r \geqslant 0$*).

Exercice 26. Soit $p \in [1, \infty]$. Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour l'opérateur $T : L^p(]0,1[) \to L^p(]0,1[)$ défini par

$$Tf(x) := x^2 \int_0^1 y^2 f(y)\, dy.$$

Exercice 27. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que si $\sigma(T)$ est dénombrable, alors $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Exercice 28. (Spectre d'une restriction)
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit également $E \subseteq X$ un sous-espace fermé invariant par T. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : si Ω est une composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ telle que $\Omega \cap \sigma(T_{|E}) \neq \emptyset$, alors $\Omega \subseteq \sigma(T_{|E})$.

(1) Montrer que si Γ est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall \lambda \in \Gamma\ \forall x \in X\ :\ \|Tx - \lambda x\| \geqslant c\,\|x\|$.

(2) Soit Γ un compact de $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$, et soit $c > 0$ donnée par (1). Montrer que si $\lambda_0 \in \Gamma$ est tel que $T_{|E} - \lambda_0 I_E$ est inversible (dans $\mathcal{L}(E)$), alors $T_{|E} - \lambda I_E$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda - \lambda_0| < c$.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 29. (Théorème de Jamison)
Soit X un espace de Banach *séparable*, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'on a $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T^k\| < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est dénombrable.

(1) On pose $E := \sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$; et pour tout $\lambda \in E$, on choisit $x_\lambda \in X$ tel que $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$ et $\|x_\lambda\| = 1$.

   (a) Montrer que si $\lambda, \mu \in \Lambda$, alors
   $$\forall k \geqslant 1\ :\ |\mu^k - \lambda^k| \leqslant (1 + \|T^k\|)\,\|x_\mu - x_\lambda\|.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que
   $$\forall \lambda, \mu \in E \text{ avec } \lambda \neq \mu\ :\ \|x_\mu - x_\lambda\| \geqslant c.$$

(2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 30. (spectre d'une isométrie)
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $V : X \to X$ une isométrie (linéaire).

(1) Montrer qu'on a $\sigma_p(V) \subseteq \mathbb{T}$ et $\sigma(V) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, où $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Montrer qu'on a $\lambda \notin \sigma(V)$ si et seulement si $V - \lambda I$ est surjectif.

(3) Montrer que $\mathbb{D}\backslash\sigma(V)$ est ouvert *et fermé* dans $\mathbb{D}$.

(4) Établir les propriétés suivantes.

   (i) Ou bien $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$, ou bien $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$.

   (ii) $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$ si et seulement si V est bijective.

Exercice 31. (image numérique)
Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On pose
$$V(T) := \big\{\langle T(x), x\rangle;\ x \in H\,,\ \|x\| = 1\big\}.$$

(1) Montrer qu'on a $\sigma(T) \subseteq \overline{V(T)}$. (*Penser aux valeurs propres approchées.*)

(2) On suppose que H est de dimension finie et que T est un opérateur normal. Montrer que $V(T)$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$.

(3) On revient au cas général. Déduire de (1) qu'on a
$$r(T) \leqslant \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x\rangle| \leqslant \|T\|\,.$$
Que peut-on en déduire si l'opérateur T est normal?

Exercice 32. Dans tout l'exercice, X un espace de Banach complexe.

(1) Pour $R \in \mathcal{L}(X)$, laquelle des deux propriétés suivantes implique l'autre?
   (i) R est un plongement;
   (ii) R possède un *inverse à gauche* dans $\mathcal{L}(X)$; autrement dit, il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $SR = I$.

   Montrer que si $\mathrm{Im}(R)$ possède un supplémentaire fermé dans X, alors (i) et (ii) sont équivalentes.

(2) Pour $R \in \mathcal{L}(X)$, laquelle des deux propriétés suivantes implique l'autre?
   (i) R est surjectif;
   (ii) R possède un *inverse à droite* dans $\mathcal{L}(X)$.

   Montrer que si $\ker(R)$ possède un supplémentaire fermé dans X, alors (i) et (ii) sont équivalentes.

(3) Soit $R \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que R possède un inverse à gauche S dans $\mathcal{L}(X)$. Montrer que si $R' \in \mathcal{L}(X)$ est suffisamment proche de R, alors R' possède un inverse à gauche S' vérifiant $\|S'\| \leqslant 2\|S\|$. (*Commencer par montrer que si R' est proche de R, alors SR' est inversible*).

(4) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \in \partial\sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ ne possède pas d'inverse à gauche et pas d'inverse à droite dans $\mathcal{L}(X)$.

Exercice 33. (Théorème de Katznelson-Tzafriri)
Dans tout l'exercice, X est un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur vérifiant $\|T\| \leqslant 1$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ ou $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\}$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$.

Dans toute la suite, on note $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues 2π-périodiques vérifiant $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(n)| < \infty$. Pour $g \in A(\mathbb{T})$, on pose $\|g\|_A := \sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(n)|$. Enfin, si $F : \mathbb{R} \to Z$ est une fonction continue 2π-périodique à valeurs dans un espace de Banach Z, on définit ses coefficients de Fourier $\widehat{F}(n)$ par la formule habituelle :
$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta\,.$$

(1) Montrer que si $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$, alors $\|T^{n+1} - T^n\| \geqslant |\lambda - 1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que (ii) entraîne (i).

(2) Montrer que toute fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ appartient à $A(\mathbb{T})$.

(3) Montrer que si $F : \mathbb{R} \to Z$ est une fonction continue 2π-périodique et si $g \in A(\mathbb{T})$, alors
$$\|\widehat{gF}(n)\| \leqslant \|g\|_A \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\widehat{F}(k)\| .$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support contenu dans $[-1, 1]$ et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$. Pour $\varepsilon \in]0, \pi[$ on note χ_ε la fonction 2π-périodique égale à $\chi(\varepsilon)$ sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que χ_ε vérifie les propriétés suivantes :
- $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ et $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.
- $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi}_\varepsilon(n+1) - \widehat{\chi}_\varepsilon(n)| \leqslant M\varepsilon$, où $M := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi}\,'(x)|\, dx$.

(5) On suppose que (i) est vérifiée.

(a) Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}$ tel que
$$F(z) := (zT - I)^{-1}$$
est bien défini pour tout $z \in \Omega$. La fonction F est alors holomorphe dans Ω (à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$).

(b) Pour $r \in]0, 1[$, on définit $F_r : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ par $F_r(\theta) := F(re^{i\theta})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$r^nT^n - r^{n-1}T^{n-1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_r(\theta)(1 - e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta .$$
En déduire que si $\varepsilon \in]0, \pi[$ et si χ_ε est la fonction donnée par (4), alors
$$\|r^nT^n - r^{n-1}T^{n-1}\| \leqslant M\varepsilon + \left\|\widehat{\Phi_{r,\varepsilon}}(n)\right\| ,$$
où $\Phi_{r,\varepsilon}(\theta) := (1 - e^{i\theta})(1 - \chi_\varepsilon(\theta))F_r(\theta)$.

(c) Observer que la fonction $\Phi_{r,\varepsilon}$ est nulle sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, et en déduire qu'il existe une constante C_ε indépendante de r telle que
$$\forall r \in [0, 1[\ \forall\theta\ :\ \|\Phi'_{r,\varepsilon}(\theta)\| \leqslant C_\varepsilon .$$

(d) Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left\|r^nT^n - r^{n-1}T^{n-1}\right\| \leqslant M\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{n}\cdot$$

(6) Montrer que (i) entraîne (ii).

Exercice 34. Soient X et Y des espaces de Banach. Montrer que s'il existe un opérateur $T : X \to Y$ compact et surjectif, alors $\dim(Y) < \infty$.

Exercice 35. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $T_K : \mathcal{C}([0, 1]) \to \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $T_Kf(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y)\, dy$. Montrer que T_K est un opérateur compact. (*Penser au Théorème d'Ascoli.*)

Exercice 36. Soit $V : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $Vf(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que V est compact et déterminer $\sigma(V)$.

Exercice 37. Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $Tf(x) := \int_0^x \phi(t)f(t)\,dt - \int_x^1 \phi(t)f(t)\,dt$. Montrer que T est compact et déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 38. Soit X un espace de Banach complexe, et soient $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T est inversible à droite, *i.e.* il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $TS = I$, et on suppose de plus qu'il existe un opérateur inversible $V \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T - V$ est compact. Montrer que T est inversible. (*Commencer par montrer que* $\sigma(TV^{-1})$ *est dénombrable; puis poser* $A = TV^{-1}$ *et utiliser l'Exercice 12.*)

Exercice 39. Soit $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $Tf(x) := \int_0^{1-x} f(t)\,dt$. Montrer que T est compact et déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 40. Pour $p \in [1,\infty[$, on note $V_p : L^p([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur défini par $V_pf(x) := \int_0^x f(t)\,dt$.

(1) Montrer que si $p > 1$, alors V_p est un opérateur compact.
(2) Qu'en est-il pour $p = 1$? (*Considérer les fonctions* $f_n = 2^n \mathbf{1}_{]2^{-n},2^{-n+1}]}$).
(3) Soit $p > 1$. En considèrant V_p comme un opérateur de $L^p([0,1])$ dans $L^p([0,1])$, déterminer $\sigma(V_p)$

Exercice 41. Soit X un espace de Banach. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors 0 est valeur propre approchée de T. Donner un exemple où 0 n'est pas valeur propre de T.

Exercice 42. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur compact. On note $\{\lambda_i;\ i \in I\}$ l'ensemble des valeurs propres non-nulles de T. Montrer qu'il existe une famille d'entiers $(n_i)_{i\in I}$ telle que : pour tout ensemble fini $J \subseteq I$,

$$X = \left(\bigoplus_{j\in J} \ker(T - \lambda_j I)^{n_j}\right) \oplus \operatorname{Im}\left(\prod_{j\in J}(T - \lambda_j I)^{n_j}\right).$$

(*Commencer par montrer que si* P *et* Q *sont des polynômes premiers entre eux, alors* $\ker((PQ)(T)) = \ker(P(T)) \oplus \ker(Q(T))$ *et* $\operatorname{Im}((PQ)(T)) = \operatorname{Im}(P(T)) \cap \operatorname{Im}(Q(T))$.)

Exercice 43. (perturbation d'une base hilbertienne)
Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, et soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \|f_i - e_i\|^2 < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que (f_i) est également une base hilbertienne de H.

(1) Pour $x \in H$, on pose $Tx := \sum_0^\infty \langle x, e_i\rangle (e_i - f_i)$. Justifier la définition et montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.
(2) Montrer que T est un opérateur compact.
(3) Déterminer $\ker(I - T)$, puis montrer que $R := I - T$ est inversible.
(4) Calculer Re_i pour $i \in \mathbb{N}$, et conclure.

Exercice 44. (Théorème de Lomonosov)
Dans cet exercice, X est un espace de Banach complexe tel que $\dim(X) \geqslant 2$, et $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact. On pose $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{L}(X);\ AT = TA\}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $E \subseteq X$, avec $E \neq \{0\}$ et $E \neq X$, tel que $\forall A \in \mathcal{A}\ :\ A(E) \subseteq E$.

(1) Démontrer le résultat souhaité lorsque $\sigma(T)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Dans la suite, on suppose que $\sigma(T) = \{0\}$ et $\|T\| = 1$.

(2) Soit $x_0 \in X$ tel que $\|Tx_0\| > 1$. On pose $B := B(x_0, 1)$. Montrer que $\|x_0\| > 1$ et que $\overline{T(B)} \subseteq X\backslash\{0\}$.
(3) Pour $z \in X\backslash\{0\}$, on pose $E_z := \overline{\{Rz;\ R \in \mathcal{A}\}}$. Montrer que E_z est un sous-espace vectoriel de X tel que $\forall A \in \mathcal{A}\ :\ A(E_z) \subseteq E_z$.
(4) Dans cette question, on suppose qu'on a $E_z = X$ pour tout $z \in X\backslash\{0\}$.
   (a) Pour $R \in \mathcal{A}$, on pose $O_R := \{z \in X;\ \|Rz - x_0\| < 1\}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $\overline{T(B)} \subseteq \bigcup_{R\in\mathcal{F}} O_R$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(R_n)_{n\geqslant 1} \subseteq \mathcal{F}$ telle que
$$\forall n \geqslant 1\ :\ \|(R_nT)(R_{n-1}T)\cdots(R_1T)x_0 - x_0\| < 1.$$
   (c) Montrer qu'il existe une constante C telle que
$$\forall n \geqslant 1\ :\ \|(R_nT)(R_{n-1}T)\cdots(R_1T)\| \leqslant C^n\|T^n\|;$$
   et en déduire que $\|(R_nT)(R_{n-1}T)\cdots(R_1T)\| \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (d) En déduire une contradiction.
(5) Conclure.

Exercice 45. Soit A une algèbre de Banach avec unité *sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, et soit $u \in A$ vérifiant $r(u) < 1$. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $\mathbf{1} - u = e^a$.

Exercice 46. Soit A une algèbre de Banach complexe, *commutative* et avec unité. On pose $\exp(A) := \{e^a;\ a \in A\}$.

(1) Montrer que $\exp(A)$ est un sous-groupe ouvert de $G(A)$.
(2) En déduire que si $G(A)$ est connexe, alors $\exp(A) = G(A)$.

Exercice 47. Le but de l'exercice est de montrer que toute matrice inversible $M \in M_d(\mathbb{C})$ peut s'écrire $M = e^A$ pour une certaine matrice A.

(1) Soit $M \in M_d(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{A}_M$ la sous-algèbre de $M_d(\mathbb{C})$ engendrée par I et M; autrement dit, $\mathcal{A}_M = \mathbb{C}[M]$. Montrer que si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{A}_M$.
(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant l'Exercice 46.

Exercice 48. ("Théorème de Gelfand")
Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T est une isométrie bijective, et que $\sigma(T) = \{1\}$. Le but de l'exercice est de montrer que $T = I$.

(1) Montrer qu'il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T = e^{iS}$ et $\sigma(S) = \{0\}$.
(2) Définir $\sin(R)$ pour tout opérateur $R \in \mathcal{L}(X)$, puis montrer que
$$\forall n, k \in \mathbb{N} \ : \ \|\big(\sin(nS)\big)^k\| \leqslant 1.$$
(3) On rappelle que la fonction arcsin est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et on écrit $\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.
   (a) Montrer que les coefficients c_k sont $\geqslant 0$, et qu'on a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \frac{\pi}{2}$.
   (b) Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert. Pour $z \in \mathbb{D}$, on pose $\arcsin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, de sorte que arcsin est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Montrer que si $A \in \mathcal{L}(X)$ vérifie $r(A) < 1$, alors l'opérateur $\arcsin(A)$ est bien défini et
$$\|\arcsin(A)\| \leqslant \frac{\pi}{2} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|.$$
(4) Déduire de (2) et (3) que $S = 0$, et conclure.

Exercice 49. (décomposition polaire)
Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors T peut se décomposer de manière unique sous la forme $T = UP$, où U est unitaire et P est positif.

Exercice 50. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que T est positif et inversible si et seulement si il existe un opérateur auto-adjoint L tel que $T = e^L$; et que dans ce cas l'opérateur L est unique.

Exercice 51. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, et soit $f : K \to \mathbb{C}$ une fonction continue et injective. Montrer que si T_1 et T_2 sont deux opérateurs normaux sur un espace de Hilbert H tels que $\sigma(T_1) = K = \sigma(T_2)$ et $f(T_1) = f(T_2)$, alors $T_1 = T_2$.

Exercice 52. (Théorème de Fuglede-Putnam)
Soit H un espace de Hilbert complexe, et soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ des opérateurs normaux. Soit également $T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose qu'on a $AT = TB$. Le but de l'exercice est de montrer que $A^*T = TB^*$.

(1) Montrer que pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur e^{S-S^*} est unitaire.
(2) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ e^{zA}T = Te^{zB}$.
(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe des opérateurs unitaires U_z et V_z tels que $e^{zA^*}Te^{-zB^*} = U_zTV_z$.
(4) Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(H)$ définie par $f(z) := e^{zA^*}Te^{-zB^*}$ est constante. (*Observer que f est holomorphe.*)
(5) Conclure.

Exercice 53. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que si $A \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $AT = TA$, alors $Af(T) = f(T)A$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. (*Utiliser l'Exercice 52!*)

Exercice 54. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer en deux lignes que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal, alors

$$\|T\| = \sup \big\{ |\langle Tx, x\rangle|;\ \|x\| = 1 \big\}.$$

(À comparer avec la preuve donnée par l'Exercice 31.)

Exercice 55. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que T est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 56. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On suppose que $\sigma(T) = \{0, 1\}$. Montrer que T est une projection orthogonale.

Exercice 57. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On suppose que $\sigma(T)$ est dénombrable. Montrer que T est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 58. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$ est un point isolé de $\sigma(T)$, alors λ est une valeur propre de T.

Exercice 59. Démontrer le Théorème ergodique de von Neumann pour un opérateur T *unitaire* en utilisant le Théorème spectral.

Exercice 60. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer que si $U \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire, alors on peut écrire $U = e^{iT}$ pour un certain opérateur auto-adjoint T.

Exercice 61. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. On note $\mathrm{GL}(H)$ l'ensemble des opérateurs inversibles sur H. Montrer que $\mathrm{GL}(H)$ est connexe. (*Penser à la décomposition polaire.*)

Exercice 62. Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach commuative et unitaire. Montrer que si $a, b \in A$, alors $\sigma(a+b) \subseteq \sigma(a) + \sigma(b)$ et $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b)$.

Exercice 63. (Théorème de Wiener)
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on note $c_n(f)$ les coefficients de Fourier de f :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ est telle que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty$ et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{T}$, alors la fonction $g = 1/f$ vérifie également $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(g)| < \infty$.*

(1) On note $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ vérifiant $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty$.
   (a) Montrer que $A(\mathbb{T})$ est un sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.
   (b) Pour $f \in A(\mathbb{T})$, on pose

$$\|f\|_A := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|.$$

   Montrer que $(A(\mathbb{T}), \|\cdot\|_A)$ est une algèbre de Banach.
(2) Montrer que si $\gamma : A(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ est un homomorphisme, alors il existe $z_0 \in \mathbb{T}$ tel que $\forall f \in A(\mathbb{T}) \ : \ \gamma(f) = f(z_0)$.
(3) Conclure.

Exercice 64. (Théorème de Wiener, 2)
Le but de l'exercie est de donner une preuve "élémentaire" du Théorème de Wiener (*cf* l'Exercice 63), dont on rappelle l'énoncé : *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier est absolument convergente, et si f ne s'annule jamais, alors la série de Fourier de $1/f$ est elle aussi absolument convergente.*

(1) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonction continues 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et $A \subseteq \mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions f dont la série de Fourier est absolument convergente. Pour $f \in A$, on pose

$$\|f\|_A := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|.$$

   Montrer que $(A, \|\cdot\|_A)$ est une algèbre de Banach.

(2) On note $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodiques. Montrer qu'on a $\mathcal{C}^1_{2\pi} \subseteq A$ et que si $g \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$, alors

$$\|g\|_A \leqslant \|g\|_\infty + 2\|g'\|_\infty \,.$$

(3) Montrer que $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ est dense dans A.

(4) Montrer que si $h \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ et s'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ |h(t)| \geqslant \sigma,$$

alors $h^{-n} := 1/h^n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec

$$\|h^{-n}\|_A \leqslant c_h \, n \, \sigma^{-n},$$

où c_h est une constante dépendant uniquement de h.

(5) Soit $f \in A$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier l'existence d'une constante $\sigma > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ |f(t)| \geqslant 2\sigma$.
   (b) Montrer à l'aide de (4) que si $h \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ vérifie $\|h - f\|_A \leqslant \frac{\sigma}{2}$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} (h - f)^n h^{-n-1}$ converge dans A.

(6) Conclure.