Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 4

(mesures)

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit m une mesure positive sur $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$. Montrer soigneusement que si $h \in L^1(\Omega, m)$ est telle que $hm = 0$, alors $h = 0$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable. Montrer que si μ et μ' sont des mesures complexes sur $(\Omega, \mathfrak{B})$, alors $|\mu + \mu'| \leq |\mu| + |\mu'|$.

Exercice 3. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures complexes sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty |\mu_n|(\Omega) < \infty$. Montrer qu'on définit une mesure complexe sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ en posant $\mu(A) := \sum_0^\infty \mu_n(A)$.

Exercice 4. Sot $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ une fonction finiment additive. Montrer que μ est une mesure complexe si et seulement si il existe une mesure positive finie m telle que $\forall A \in \mathfrak{B} \ : \ |\mu(A)| \leq m(A)$.

Exercice 5. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$. Montrer *en utilisant uniquement la définition d'une mesure complexe* que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles mesurables et si on pose $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, alors $\mu(B_n)$ tend vers $\mu(B)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit m une mesure positive sur $(\Omega, \mathfrak{B})$. Montrer que si $\mu = hm$ avec $h \in L^1(\Omega, m)$ réelle, alors $\mu^+ = h^+m$ et $\mu^- = h^-m$.

Exercice 7. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et soit m la mesure de comptage.

(1) Montrer que μ est absolument continue par rapport à m.
(2) Peut-on trouver une fonction h telle que $\mu = hm$?

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit m une mesure positive sur $(\Omega, \mathfrak{B})$. Soit également μ une mesure complexe telle que $\mu \ll m$. Montrer que "$\mu(A) \to 0$ quand $m(A) \to 0$"; autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathfrak{B} \ : \ m(A) < \delta \implies |\mu(A)| < \varepsilon$.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable. Montrer que si μ est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{B})$, alors $\mu^+ \perp \mu^-$. (*Utiliser l'Exercice 6.*)

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable. Montrer que si μ une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{B})$, alors

$$\forall A \in \mathfrak{B} \ : \ \mu^+(A) = \sup \big\{\mu(E);\ E \subseteq A\big\}.$$

(*Utiliser l'Exercice 9.*) En déduire que si μ_1 et μ_2 sont des mesures positives finies telles que $\mu = \mu_2 - \mu_1$, alors $\mu_2 \geq \mu^+$ et $\mu_1 \geq \mu^-$.

Exercice 11. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit μ une mesure complexe sur $(\Omega, \mathfrak{B})$. Montrer que μ est positive si et seulement si $|\mu|(\Omega) = \mu(\Omega)$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesurable. Montrer que si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures complexes sur $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$, alors existe une mesure positive finie m sur $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mu_n \ll m$.

Exercice 13. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable. Montrer que $M(\Omega)$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_M$. (*Utiliser l'Exercice 12.*)

Exercice 14. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soient μ_1 et μ_2 deux mesures positives finies sur $(\Omega, \mathfrak{B})$.

(1) On suppose qu'il existe une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $0 \leq f_n \leq 1$ et $\int_\Omega f_n d\mu_1 + \int_\Omega (1 - f_n) d\mu_2 \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mu_1 \perp \mu_2$. (*Poser $D := \{t \in \Omega;\ \sum_0^\infty f_n(t) = \infty\}$, et montrer que $\mu_1(D) = 0 = \mu_2(\Omega \setminus D)$.*)

(2) On note $\mathbf{B}$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant $0 \leq f \leq 1$. Montrer qu'on a l'équivalence suivante :

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \inf_{f\in\mathbf{B}} \left(\int_\Omega f\, d\mu_1 + \int_\Omega (1 - f)\, d\mu_2 \right) = 0.$$

Exercice 15. (Décomposition de Hahn)
Dans tout l'exercice, μ est une mesure réelle sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$. *On ne suppose pas connue* l'existence de la variation totale $|\mu|$, et *on ne supose pas non plus connu* le Théorème de Radon-Nikodym. Le but de l'exercice est de montrer "directement" qu'on peut décomposer μ sous la forme $\mu = \mu_1 - \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives finies telles que $\mu_1 \perp \mu_2$.

(1) On pose $c := \sup\{\mu(A);\ A \in \mathfrak{B}\}$.

  (a) Justifier que c est un nombre réel bien défini. (*Raisonner par l'absurde : en supposant que $c = \infty$, construire une suite (A_k) d'ensembles mesurables deux à deux disjoints telle que $\mu(A_k) \to \infty$.*)

(b) Montrer que $\forall A, A' \in \mathfrak{B} \,:\, \mu(A \cup A') \geq \mu(A) + \mu(A') - c$.

(c) On choisit une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}$ telle que $\mu(A_k) \geq c - 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déduire de (b) et de l'Exercice 5 qu'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \mu\left(\bigcup_{k>n} A_k\right) \geq c - 2^{-n}\,.$$

(d) Montrer qu'il existe un ensemble $D \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(D) = c$.

(2) Montrer que pour tout $B \in \mathfrak{B}$, on a $\mu(D \cap B) \geq 0$ et $\mu(D^c \cap B) \leq 0$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 16. (espérance conditionnelle)
Dans tout l'exercice, on ne considère que des fonctions mesurables *à valeurs réelles.* Soit $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $\mathfrak{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{T}$. On note $L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ le sous-espace de $L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ constitué par les (classes d'équivalence de) fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables.

(1) Montrer que $L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ est un sous-espace fermé de $L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$

(2) Montrer que pour toute $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$, il existe une unique $g \in L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ telle que

$$\forall B \in \mathfrak{B} \,:\, \int_B f\, d\mathbb{P} = \int_B g\, d\mathbb{P}.$$

(*On rappelle que l'application* $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ *définie par* $\mu(B) := \int_B f\, d\mathbb{P}$ *est une mesure réelle sur* $(\Omega, \mathfrak{B})$.) Dans la suite, on notera $g = \mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$, ou simplement $g = \mathbb{E}_{\mathfrak{B}} f$.

(3) Montrer que si $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ est positive, alors $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$ est également (presque partout) positive. (*Poser* $B := \{t \in \Omega;\ \mathbb{E}_{\mathfrak{B}} f(t) < 0\}$). En déduire que pour toute $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$, on a $|\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)| \leq \mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(|f|)$ pp.

(4) Montrer que $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}$ est une projection (linéaire) continue de $L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ sur $L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, et qu'on a $\|\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}\| = 1$.

(5) Dans cette question, on suppose que la tribu $\mathfrak{B}$ est engendrée par une partition finie $(\Omega_1, \dots, \Omega_N)$ de Ω. Décrire $\mathfrak{B}$ et les éléments de $L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, puis donner une formule explicite pour $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}}(f)$.

(6) Soit $(\mathfrak{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathfrak{T}$ telle que $\mathfrak{B}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}_n$ engendre $\mathfrak{T}$.

(a) Montrer que si ν est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{T})$ telle que $\nu(B) = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{B}_\infty$, alors $\nu = 0$. En déduire que $Z := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^1(\Omega, \mathfrak{B}_n, \mathbb{P})$ est un sous-espace dense de $L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$.

(b) Montrer que si $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}_{\mathfrak{B}_n}(f) \to f$ en norme L^1.

Exercice 17. (Critère de Wiener)
Soit μ une mesure complexe sur le cercle $\mathbb{T}$. On définit ses coefficients de Fourier $\widehat{\mu}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\widehat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^n d\mu(z).$$

(1) Montrer que l'ensemble $A := \{a \in \mathbb{T};\ \mu(\{a\}) \neq 0\}$ est dénombrable.
(2) Montrer qu'on a $\sum_{a\in\mathbb{T}} |\mu(\{a\})|^2 = \mu \otimes \bar{\mu}(\Delta)$, où $\Delta := \big\{(u,v) \in \mathbb{T}\times\mathbb{T};\ u = v\big\}$.
(3) Pour $(u,v) \in \mathbb{T}\times\mathbb{T}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} u^{-k}v^k$.
(4) Montrer qu'on a

$$\sum_{a\in\mathbb{T}} |\mu(\{a\})|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\mu}(k)|^2.$$

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que μ soit **continue**, i.e. pour qu'on ait $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{T}$.

Exercice 18. (mesures de Rajchman)
Si μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$, on définit ses coefficients de Fourier $\widehat{\mu}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\widehat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^n d\mu(z).$$

On dit que μ est une **mesure de Rajchman** si on a $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$.

(1) Donner un exemple de mesure de Rajchman ($\neq 0$).
(2) Montrer que si μ est une mesure de Rajchman, alors $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{T}$. (*Utiliser l'Exercice 17.*)
(3) Montrer que si m est une mesure de Rajchman positive, alors toute mesure complexe $\mu \ll m$ est de Rajchman. (*Utiliser, après l'avoir justifiée, la densité des polynômes trigonométriques dans* $L^1(\mathbb{T}, m)$.)

Exercice 19. (Lemme de Rajchman)
On garde les notations de l'Exercice 18. Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$. On suppose que $\widehat{\mu}(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que μ est de Rajchman, *i.e.* qu'on a aussi $\lim_{n\to-\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$.

(1) Soit $m \in M_+(\mathbb{T})$ et soit $h \in L^\infty(\mathbb{T}, m)$. On suppose que $\widehat{hm}(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $\widehat{fhm}(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{T}, m)$. (*Commencer par le cas où f est un polynôme trigonométrique.*)
(2) Déduire de (1) que $\widehat{|\mu|}(n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
(3) Montrer que μ est de Rajchman.

Exercice 20. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit m une mesure positive finie sur $(\Omega, \mathfrak{B})$. Soit également $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables, $f_k : \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose qu'on a $|f_k(t)| \leq 1$ pour tout k et pour tout $t \in \Omega$, et que $\int_\Omega f_k\, dm \to m(\Omega)$ quand $k \to \infty$.

(1) Montrer que $\int_\Omega |f_k - 1|^2 dm \to 0$ quand $k \to \infty$.
(2) En déduire que toute sous-suite de (f_k) possède une sous-suite qui tend vers 1 m-pp.
(3) Montrer que si μ est une mesure complexe telle que $\mu \ll m$, alors $\int_\Omega f_k\, d\mu \to \mu(\Omega)$ quand $k \to \infty$.

Exercice 21. Dans tout l'exercice, on note m la mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{T}$. Le but de l'exercice est de le résultat suivant : *si ν une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\nu \perp m$, alors les fonctions polynomiales sont denses dans $L^2(\mathbb{T}, \nu)$.*

(1) Montrer que si λ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\int_\mathbb{T} z^n d\lambda(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lambda = 0$. En déduire que si μ est une mesure complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant $\int_\mathbb{T} z^n d\lambda(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, alors $\mu = cm$, pour une certaine constante c.
(2) Soit $\nu \in M_+(\mathbb{T})$. On note E le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$, et π_E la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}, \nu)$ sur E. Enfin, on pose $\phi := \mathbf{1} - \pi_E(\mathbf{1})$.
   (a) Montrer que la fonction $z \mapsto z^n \phi(z)$ appartient à E pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire qu'on a $\int_\mathbb{T} z^n |\phi(z)|^2 d\nu(z) = 0$ pour tout $n \geq 1$.
   (c) Montrer qu'il existe une constante c telle que $|\phi|^2 \nu = cm$.
(3) Soit $\nu \in M_+(\mathbb{T})$ telle que $\nu \perp m$.
   (a) Avec les notations de (2), montrer que la fonction $\mathbf{1}$ appartient à E.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto z^{-k}$ appartient à E.
   (c) Conclure.

Exercice 22. (Théorème des frères Riesz)
Dans cet exercice, on note m la mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{T}$. On dit qu'une mesure complexe $\mu \in M(\mathbb{T})$ est **analytique** si on a $\widehat{\mu}(n) = 0$ pour tout $n \leq 0$. Le but de l'exercice est de montrer que toute mesure analytique $\mu \in M(\mathbb{T})$ est absolument continue par rapport à m.

(1) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{z}^n \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ la fonction $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^n$; et on pose
$$\mathbf{A} := \overline{\mathrm{vect}}\left\{\mathbf{z}^n;\ n \geq 0\right\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{T}).$$
   (a) Montrer que $\mathrm{Re}(\mathbf{A}) := \left\{\mathrm{Re}(f);\ f \in \mathbf{A}\right\}$ est dense dans $\mathcal{C}_\mathbb{R}(\mathbb{T})$. (*Commencer par montrer que l'ensemble des fonctions de la forme $f + \overline{g}$ avec $f, g \in \mathbf{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.*)

(b) Montrer que $\mathbf{A}$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ contenant les constantes, et que

$$\forall f, g \in \mathbf{A} \ : \ \int_{\mathbb{T}} fg\, dm = \left(\int_{\mathbb{T}} g\, dm\right) \left(\int_{\mathbb{T}} f\, dm\right).$$

En déduire que si $h \in \mathbf{A}$, alors $e^h \in \mathbf{A}$ et

$$\int_{\mathbb{T}} e^h dm = e^{\int_{\mathbb{T}} h\, dm}.$$

(c) Montrer qu'une mesure $\mu \in M(\mathbb{T})$ est analytique si et seulement elle vérifie $\int_{\mathbb{T}} f\, d\mu = 0$ pour toute $f \in \mathbf{A}$.

(2) Soit $\nu \in M(\mathbb{T})$ une mesure telle que $\nu \perp m$.

(a) Montrer qu'il existe une suite croissante $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés de $\mathbb{T}$ telle que, en posant $K := \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$, on ait $m(K) = 0$ et $\nu(\mathbb{T} \setminus K) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction continue $\phi_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi_n(z) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{T}$, $\phi_n(z) > n$ sur K_n et $\int_{\mathbb{T}} \phi_n\, dm < 2^{-n}$. En déduire qu'on peut trouver une fonction $h_n \in \mathbf{A}$ telle que la fonction $\mathrm{Re}(h_n)$ possède les mêmes propriétés que ϕ_n. Montrer également qu'on peut supposer que $\int_{\mathbb{T}} h_n\, dm \in \mathbb{R}$.

(c) Déduire de (a) et (b) qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbf{A}$ telle que $|f_n| \leq 1$, $f_n(z) \to 0$ ν-pp et $f_n(z) \to 1$ m-pp. (*Poser* $f_n := e^{-h_n}$. *Montrer que la série* $\sum \int_{\mathbb{T}} |1 - f_n|^2\, dm$ *est convergente.*)

(3) Soit $\mu \in M(\mathbb{T})$. On écrit $\mu = \mu_a + \mu_s$, où $\mu_a \ll m$ et $\mu_s \perp m$. Montrer que si μ est analytique, alors μ_a et μ_s sont analytiques. (*Utiliser* (1c) *et* (2c).)

(4) Montrer que si $\mu \in M(\mathbb{T})$ est analytique, alors la mesure $\mathbf{z}^{-1}\mu_s$ est analytique. (*Appliquer* (3) *à* $\mathbf{z}^{-1}\mu - cm$, *pour une constante* c *bien choisie.*) En déduire que si μ est analytique, alors $\mathbf{z}^{-k}\mu_s$ est analytique pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Conclure.

Exercice 23. Utiliser le Théorème des frères Riesz (Exercice 22) pour donner une preuve courte du résultat de l'Exercice 21.

Exercice 24. Soit Ω un ensemble à 2 éléments, $\Omega = \{a, b\}$.

(1) Montrer qu'on définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant $m(\emptyset) := 0$, $m(\{a\}) := 1$, et $m(\{b\}) = m(\Omega) := \infty$.

(2) Montrer qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dans $L^1(\Omega, m)$ si et seulement si $f(b) = 0$; et que toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dans $L^\infty(\Omega, m)$.

(3) Est-il vrai que que le dual de $L^1(\Omega, m)$ est isomorphe à $L^\infty(\Omega, m)$?

Exercice 25. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré, avec m sigma-finie, et soit $1 \leq p \leq \infty$, d'exposant conjugué q. Soit également $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable, et soit $C \in \mathbb{R}^+$. On suppose que

$$\forall g \in L^q \ : \ \int_\Omega |fg| \, dm \leq C \, \|g\|_q.$$

Montrer que $f \in L^p$ et $\|f\|_p \leq C$.

Exercice 26. (Inégalité de Minkowski intégrale)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré sigma-fini, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que f est de la forme

$$f(x) = \int_\Lambda F_t(x) \, d\nu(t),$$

où $(\Lambda, \mathfrak{A}, \nu)$ est un autre espace mesuré sigma-fini et la fonction $(x, t) \mapsto F_t(x)$ est mesurable. Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, on a

$$\|f\|_p \leq \int_\Lambda \|F_t\|_p \, d\nu(t).$$

(*La façon la plus simple de procéder est sans doute d'utiliser l'Exercice 25.*)

Exercice 27. Soit $1 < p < \infty$, d'exposant conjugué q, et soit $L^p := L^p(\,]0, \infty[\,)$. Pour toute $f \in L^p$, on note $Tf :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$Tf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt.$$

(1) Montrer que $Tf \in L^p$ pour toute $f \in L$ et que $T : L^p \to L^p$ est un opérateur borné, avec $\|T\| \leq q$. (*Utiliser l'Exercice 25, ou bien faire un changement de variable et utiliser l'Exercice 26.*)
(2) Montrer qu'en fait $\|T\| = q$.

Exercice 28. (convolution L^1-L^p)
Soit φ une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $p \in]1, \infty[$. Montrer que si f est une fonction positive dans $L^p(\mathbb{R})$, alors $\varphi * f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * \varphi\|_p \leq \|\varphi\|_1 \, \|f\|_p$. (*Utiliser l'exercice 26*).

Exercice 29. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables 2 à 2 disjoints telle que $m(E_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le but de l'exercice est de montrer que "L^1 n'est pas le dual de L^∞".

(1) On note $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de L^∞ constitué par toutes les fonctions f de la forme $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{E_n}$, où (a_n) est une suite de nombres complexes admettant une limite quand $n \to \infty$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Phi : L^\infty \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{E_n} \in \mathcal{E} \; : \; \Phi(f) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(2) Montrer que la forme linéaire Φ ne provient pas d'une $g \in L^1$, *i.e.* qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1$ telle que $\forall f \in L^\infty \; : \; \Phi(f) = \int_\Omega fg\, dm$.

Exercice 30. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes.

(i) F est lipschitzienne.

(ii) Il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \; : \; F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

(1) Démontrer l'implication "facile".

(2) Dans cette question, on suppose que la fonction F est lipschitzienne, et on veut montrer que F s'écrit comme dans (ii).

(a) On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \;\; : \;\; \left| \int_{\mathbb{R}} F(t)\phi'(t)\, dt \right| \leq C \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)|\, dt.$$

(*Démarrer en écrivant la définition de $\phi'(t)$; puis continuer.*)

(b) En déduire qu'il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F' = f$ au sens des distributions.

(c) Conclure.

Exercice 31. (opérateurs commutant avec les translations)
Dans tout l'exercice, on note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $\tau_\alpha f$ la fonction définie par $\tau_\alpha f(x) := f(x-\alpha)$. Soit $p \in [1, \infty[$. On dit qu'un opérateur borné $T = L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ **commute avec les translations** si on a $T\tau_\alpha = \tau_\alpha T$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Soit $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$, où q est l'exposant conjugué de p. Montrer que l'opérateur $T_\varphi : L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ défini par $T_\varphi(f) := \varphi * f$ commute avec les translations. (*Il faut d'abord justifier que T envoie bien L^p dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.*)

(2) Soit $T : L^p(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ un opérateur commutant avec les translations.

(a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in L^p \,:\, Tf(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(-y)\,dy\,.$$

(b) Montrer que $T = T_\varphi$.

Exercice 32. Soit m une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|t|}dm(t) < \infty$ (ce qui entraine en particulier que m est *finie*). Soit également $p \in [1, \infty[$.

(1) Montrer que $L^p(\mathbb{R}, m)$ contient toutes les fonctions polynomiales.

(2) Soit $q \in]1, \infty]$. Montrer que si $f \in L^q(\mathbb{R}, m)$, alors la formule

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} f(t)\,dm(t)$$

définit une fonction holomorphe dans la bande $\{|\mathrm{Re}(z)| < \alpha/p\}$, et donner l'expression de $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Soit σ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. On note $\widehat{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la transformée de Fourier de σ, qui est la fonction définie par

$$\widehat{\sigma}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} d\sigma(x).$$

(a) Montrer que pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\widehat{\sigma}(t)\,dt.$$

(b) En déduire que si $\widehat{\sigma} = 0$, alors $\sigma = 0$.

(4) Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $L^p(\mathbb{R}, m)$.

Exercice 33. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_\alpha :]0,1[\to \mathbb{R}$ par $f_\alpha(t) = t^{-\alpha}$. D'autre part, on fixe $p \in [1, \infty[$, et on note q l'exposant conjugué.

(1) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à $L^p(]0,1[)$?

(2) Soit $g \in L^q(]0,1[)$.

(a) Montrer que la formule $G(z) := \int_0^1 g(t)t^{-z}dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $U := \{\mathrm{Re}(z) < 1/p\}$.

(b) Montrer que si $G = 0$, alors $g = 0$. (*Prendre z imaginaire pur et poser* $t := e^{-u}$).

(3) Montrer que $\mathrm{vect}\{f_\alpha;\ \alpha < 1/p\}$ est dense dans $L^p(]0,1[)$.

Exercice 34. (densité des fonctions en escaliers)

(1) Soit $q \in [1,\infty]$. Montrer que si $g \in L^q(\mathbb{R})$ vérifie $\int_I g(t)\,dt = 0$ pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$, alors $g = 0$. (*Une façon possible de procéder : pour tout intervalle borné $K \subseteq \mathbb{R}$, poser $\mu_K := \mathbf{1}_K g\, m$, où m est la mesure de Lebesgue; montrer que $\mu_K = 0$ en utilisant le Théorème des classes monotones. Une autre possibilité : poser $G(x) := \int_0^x g(t)\,dt$ et utiliser un peu de théorie des distributions.*)

(2) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite **en escalier** si elle est de la forme $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \mathbf{1}_{I_k}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ et les I_k sont des intervalles bornés. Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 35. (caractères de $L^1(\mathbb{R})$)
Un **caractère** de $L^1(\mathbb{R})$ est une forme linéaire continue $\Phi : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, non nulle, telle que

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \;\; : \;\; \Phi(f * g) = \Phi(f)\Phi(g)\,.$$

(1) Montrer que si $\xi \in \mathbb{R}$, alors l'application $f \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est un caractère de $L^1(\mathbb{R})$, que l'on note Φ_ξ.

(2) Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$.

  (a) Pourquoi existe-t-il une fonction $\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t) g(t)\,dt$ pour toute $f \in L^1$?

  (b) Montrer que pour $f, g \in L^1$, on a $\Phi(f * g) = \int_{\mathbb{R}} g(s)\Phi(\tau_s f)\,ds\,$, où $\tau_s f(t) := f(t-s)$.

  (c) En déduire que si $f \in L^1$, alors $\Phi(f)\beta(s) = \Phi(\tau_s f)$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.

  (d) On suppose que Φ est un caractère. Montrer qu'il existe une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $\alpha = \beta$ presque partout et $\alpha(s+s') = \alpha(s)\alpha(s')$ pour tous $s, s' \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que tout caractère de $L^1(\mathbb{R})$ est du type Φ_ξ.

Exercice 36. Pour $p \in [1,\infty]$, on pose $L^p := L^p([0, 2\pi])$. Si $f \in L^p$, on note $\widehat{f}(n)$ les coefficients de Fourier de f. Enfin, pour tout ensemble $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$, on pose

$$L^1_\Lambda := \left\{ f \in L^1;\; \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour tout } n \notin \Lambda \right\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes (portant sur Λ).

(i) $L^1_\Lambda \subseteq L^2$.

(ii) Il existe une constante C telle que $\forall f \in L^1_\Lambda \;:\; \|f\|_2 \leq C\,\|f\|_1$.

(iii) Pour toute suite $(a_n)_{n\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$, il existe une fonction $g \in L^\infty$ telle que $\forall n \in \Lambda \;:\; \widehat{g}(n) = a_n$.

(1) Montrer que (i) et (ii) sont équivalentes.

(2) On suppose que (ii) est vérifiée. Montrer que si $(a_n)_{n\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$, alors la formule $\Phi(f) := \sum_{n\in\Lambda} a_n \widehat{f}(n)$ a un sens pour toute $f \in L^1_\Lambda$ et définit une forme linéaire continue sur L^1_Λ. En déduire que (iii) est vérifiée.

(3) On suppose que (iii) est vérifiée.

  (a) Soit $\mathcal{P}_\Lambda$ l'ensemble des polynômes trigonométriques appartenant à L^1_Λ. Montrer que $\mathcal{P}_\Lambda$ est dense dans L^1_Λ. (*Utiliser le Théorème de Fejér*).

  (b) En utilisant (iii) et le théorème de l'application ouverte, montrer qu'il existe une constante C vérifiant la propriété suivante : pour toute suite $a = (a_n) \in \ell^2(\Lambda)$ et pour tout $P \in \mathcal{P}_\Lambda$, on a $\left|\sum_{n\in\Lambda} a_n \widehat{P}(n)\right| \leq C\,\|a\|_{\ell^2(\Lambda)}$.

  (c) En déduire que si $P \in \mathcal{P}_\Lambda$, alors $\sum_{n\in\Lambda} |\widehat{P}(n)|^2 \leq C^2$.

  (d) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 37. Soit Ω un espace topologique compact. Montrer que si m est une mesure borélienne positive finie et régulière sur Ω et si μ est une mesure complexe telle que $\mu \ll m$, alors la mesure $|\mu|$ est régulière.

Exercice 38. On garde les notations de l'Exercice 14, et on suppose de plus que Ω est un espace métrique compact et que $\mathfrak{B}$ est la tribu borélienne. Montrer que dans l'équivalence de (2), on peut remplacer $\mathbf{B}$ par $\mathbf{B} \cap \mathcal{C}(\Omega)$.

Exercice 39. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Montrer que si $L : \mathcal{C}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue, alors il existe un compact $K \subseteq \Omega$ et une mesure $\mu \in M(K)$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{C}(\Omega) \ : \ L(f) = \int_K f\, d\mu.$$

Exercice 40. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soit T une distribution sur Ω. On suppose que T est **positive**, *i.e.* $T(\phi) \geq 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ réelle ≥ 0.

(1) On note $\mathcal{C}_{00}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continues à support compact. Montrer que T se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue $\widetilde{T}$ sur $(\mathcal{C}_{00}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, et que $\widetilde{T}$ est une forme linéaire positive.

(2) Montrer qu'il existe une mesure borélienne positive m sur Ω telle que $m(K) < \infty$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$ et

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \ : \ T(\varphi) = \int_\Omega \varphi\, dm.$$

Exercice 41. Soit Ω un espace topologique. On note $\mathcal{C}_b(\Omega)$ l'espace des fonctions continues bornées $f : \Omega \to \mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $L : \mathcal{C}_b(\Omega) \to \mathbb{C}$ est **positive** si on a $L(f) \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ réelle ≥ 0. Le but de l'exercice est de montrer qu'une forme linéaire $L : \mathcal{C}_b(\Omega) \to \mathbb{C}$ est positive si et seulement si : L est continue et $\|L\| = L(\mathbf{1})$.

(1) Démontrer l'implication “seulement si”.
(2) On suppose que L est continue avec $\|L\| = L(\mathbf{1}) = 1$.
   (a) Soit $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ à valeurs réelles et vérifiant $\|f\|_\infty = 1$. On écrit $L(f) = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \|f \pm in\mathbf{1}\|_\infty^2 = 1 + n^2$, et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \pm 2nb \leq 1 - (a^2 + b^2)$.
   (b) Déduire de (a) que la forme linéaire L est *réelle*, *i.e.* $L(f) \in \mathbb{R}$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ réelle.
   (c) Montrer que si $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ est réelle et vérifie $0 \leq f \leq 1$, alors $|L(f)| \leq 1$ et $|1 - L(f)| \leq 1$.
   (d) Déduire de (b) et (c) que L est positive.

Exercice 42. On garde les notations de l'Exercice 41. Soit $L : \mathcal{C}_b(\Omega) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire continue et **réelle**, *i.e.* $L(f) \in \mathbb{R}$ pour toute $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ réelle. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut écrire $L = L^+ - L^-$, où L^+ et L^- sont des formes linéaires positives. Dans la suite, on supposera que $\|L\| = 1$.

(1) On note $\mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ à valeurs réelles, et on pose
$$E := \big\{(f, f);\ f \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R})\big\} \subseteq \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}).$$
En appliquant le Théorème de Hahn-Banach à la forme $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, f) := L(f)$, montrer qu'il existe deux formes $\mathbb{R}$-linéaires $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R})\ :\ \Phi_1(f) + \Phi_2(f) = L(f) \qquad \text{et}$$
$$\forall (u, v) \in \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b(\Omega, \mathbb{R})\ :\ \Phi_1(u) + \Phi_2(v) \leq \|u^+\|_\infty + \|v^-\|_\infty.$$
(2) Montrer que les formes linéaires Φ_1 et $-\Phi_2$ sont positives.
(3) Conclure.

Exercice 43. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs admettant une limite finie, avec $\alpha_0 = 0$. En adaptant la démarche de l'Exercice 33, montrer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto t^{\alpha_n}$ est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$