Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

(dualité)

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite (finie ou infinie) d'éléments de H. On dit que (f_i) est une **frame** (mot anglais) s'il existe deux constantes $C<\infty$ et $c>0$ telles que

$$\forall x\in H\ :\ c\,\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leq C\,\|x\|^2;$$

Montrer que (f_i) est une frame si et seulement si il existe un opérateur surjectif $T:\ell^2(I)\to H$ tel que $\forall i\in I\ :\ Te_i = f_i$, où (e_i) est la base canonique de $\ell^2(I)$.

Exercice 2. Montrer que si X un espace de Banach, alors X^* est complémenté dans X^{***}, *i.e.* il existe un sous-espace fermé $E\subseteq X^{***}$ tel que $X^{***}=E\oplus X^*$. (*En notant* $j_X : X\to X^{**}$ *et* $j_{X^*}:X^*\to X^{***}$ *les plongements canoniques de* X *dans* X^{**} *et de* X^* *dans* X^{***}*, montrer que* $\pi := j_{X^*}(j_X)^*\in\mathcal{L}(X^{***},X^{***})$ *est une projection dont l'image est égale à* $j_{X^*}(X^*)$*.*)

Exercice 3. (Théorème d'extension de Tietze)
Soit K un espace métrique compact, et soit E un fermé de K. Le but de l'exercice est de montrer "très facilement" que toute fonction continue $\phi : E\to\mathbb{C}$ peut se prolonger en une fonction continue défini sur K tout entier.

(1) On note $R:\mathcal{C}(K)\to\mathcal{C}(E)$ l'*opérateur de restriction*, $Rf := f_{|E}$. Identifier l'opérateur adjoint $R^*: M(E)\to M(K)$.
(2) Démontrer le résultat souhaité.
(3) Pourquoi cette preuve est-elle malhonnête?

Exercice 4. Soit K un espace métrique compact. Soient également E un fermé de K, et $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathcal{E}^\perp$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes μ sur K vérifiant $\int_K f\,d\mu = 0$ pour toute $f\in\mathcal{E}$, et on suppose qu'on a $|\mu|(E)=0$ pour toute mesure $\mu\in\mathcal{E}^\perp$.

(1) Soit $R:\mathcal{E}\to\mathcal{C}(E)$ l'opérateur défini par $Rf := f_{|E}$. Soit également σ une mesure complexe sur E.
  (a) Montrer qu'il existe une mesure complexe ν sur K telle que $\|\nu\| = \|R^*(\sigma)\|$ et $\int_K f\,d\nu = \int_E f\,d\sigma$ pour toute $f\in\mathcal{E}$.
  (b) Montrer qu'on a $\nu(A)=\sigma(A)$ pour tout borélien $A\subseteq E$, et en déduire que $\|R^*(\sigma)\|\geq\|\sigma\|$.

(2) Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}(E)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$ telle que $f_{|E} = \phi$.

Exercice 5. (Théorème de Rudin-Carleson)
Dans cet exercice, on note $\mathbf{A}$ le sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \geq 0$; autrement dit, $\mathbf{A}$ est l'adhérence des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par ailleurs, on note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{T}$ est un fermé tel que $m(E) = 0$, alors toute fonction continue $\phi : E \to \mathbb{C}$ peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{T}$ et appartenant à $\mathbf{A}$. (*Utiliser l'Exercice 4 et le Théorème des frères Riesz.*)

Exercice 6. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de X est un borélien de (X, w); et en déduire que si X est séparable, alors les boréliens de $(X, \|\cdot\|)$ et de (X, w) sont les mêmes.

Exercice 7. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ est une suite faiblement convergente, $x_n \xrightarrow{w} x \in X$, alors $\|x\| \leq \underline{\lim}\, \|x_n\|$. Démontrer le résultat analogue pour des suites w^*- convergentes.

Exercice 8. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $A \subseteq X$, on a $\operatorname{diam}\left(\overline{A}^w\right) = \operatorname{diam}(A)$, et que pour tout $B \subseteq X^*$, on a $\operatorname{diam}\left(\overline{B}^{w^*}\right) = \operatorname{diam}(B)$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, on pose $e_n(t) := e^{int}$. Montrer que $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ dans $L^\infty([0, 2\pi])$. Est-il vrai que $e_n \xrightarrow{w} 0$ dans $\mathcal{C}([0, 2\pi])$?

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n := n\mathbf{1}_{[0,e^{-n}]}$. Montrer que $f_n \xrightarrow{w} 0$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p < \infty$. Est-il vrai que $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n \in L^1([0, 1])$ la fonction définie par $f_n := 2^{n+1}\mathbf{1}_{[2^{-n-1}, 2^{-n}[}$. En considèrant $L^1([0, 1])$ comme une partie de $M([0, 1]) = \mathcal{C}([0, 1])^*$, montrer que la suite (f_n) est w^*- convergente dans $M([0, 1])$, et trouver sa limite.

Exercice 12. Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(z_n^*) \subseteq X^*$ telle que $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ mais $\|z_n^*\| \not\to 0$. (*Partir d'une suite bornée* $(x_n^*) \subseteq X^*$ *sans sous-suite convergente*).

Exercice 13. (Théorème ℓ^1 de Schur)
Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$, toute suite faiblement convergente converge en norme.* Dans toute la suite, on notera e_i^* les formes linéaires coordonnées sur $\ell^1(\mathbb{N})$: si $x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, alors $\langle e_i^*, x\rangle = x(i)$. D'autre part, on note c_{00} l'ensemble des vecteurs $z \in \ell^1(\mathbb{N})$ à support fini; et si $z, z' \in c_{00}$, on écrit $z \prec z'$ si on a $\max\big(\mathrm{supp}(z)\big) < \min\big(\mathrm{supp}(z')\big)$.

(1) Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de c_{00}, avec $z_k \prec z_{k+1}$ pour tout k.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{i\in\mathbb{N}} a(i)\langle e_i^*, z_k\rangle = \|z_k\|_{\ell^1} \, .$$
   (b) En déduire que si $z_k \xrightarrow{w} 0$, alors $\|z_k\| \to 0$

(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$. On suppose que $\langle e_i^*, x_n\rangle \to 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on peut construire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) et une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de c_{00} vérifiant les propriétés suivantes : $z_k \prec z_{k+1}$ pour tout k, et $\|z_k - x_{n_k}\|_{\ell^1} < 2^{-k}$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

(4) Que peut-on dire dans $\ell^p(\mathbb{N})$ pour $p > 1$?

Exercice 14. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que si E est un sous-espace vectoriel de X^*, alors $\big(E_\perp\big)^\perp = \overline{E}^{w^*}$.

Exercice 15. (Théorème des bipolaires)
Soit X un espace vectoriel normé réel. Pour $A \subseteq X$, on pose
$$A^\circ = \{x^* \in X^*;\ \langle x^*, z\rangle \leq 1 \text{ pour tout } z \in A\}\,;$$
et pour $B \subseteq X^*$, on pose
$$B_\circ = \{x \in X;\ \langle z^*, x\rangle \leq 1 \text{ pour tout } z^* \in B\}\,.$$
Montrer que si $A \subseteq X$ est convexe et contient 0, alors $(A^\circ)_\circ = \overline{A}$; et que si $B \subseteq X^*$ est convexe et contient 0, alors $(B_\circ)^\circ = \overline{B}^{w^*}$.

Exercice 16. Soit X un espace vectoriel normé, et soit Z un sous-espace vectoriel de X^*.

(1) Montrer que si Z sépare les points de X, alors Z est w^*- dense dans X^*.

(2) On suppose que X est séparable et que le sous-espace Z est **normant**, ce qui signifie qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que
$$\forall x \in X \; : \; \|x\| \leq C \sup\big\{|\langle z^*, x\rangle|;\ z^* \in B_Z\big\}.$$

Montrer que pour tout $x^* \in X^*$, on peut trouver une *suite* $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Z telle que $z_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, avec de plus $\|z_n^*\| \leq C\,\|x^*\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (*Supposer que* $\|x^*\| = 1$, *et considérer* $\overline{CB_Z}^{w^*}$.)

Exercice 17. Soit X un espace de Banach de dimension infinie.

(1) On note B_X la boule unité fermée de X, et S_X la sphère unité. Montrer qu'on a $\overline{S_X}^{w} = B_X$. (*Commencer par observer que si* $x_1^*, \dots, x_N^* \in X^*$, *alors* $\bigcap_{k=1}^N \ker(x_k^*) \neq \{0\}$.)

(2) Montrer de même qu'on a $\overline{S_{X^*}}^{w^*} = B_{X^*}$.

Exercice 18. Soit X un espace vectoriel normé.

(1) On suppose que la topologie faible de X est métrisable, et on choisit une distance d sur X compatible avec cette topologie.
  (a) Montrer qu'il existe une famille dénombrable $(x_i^*)_{i\in I} \subseteq X^*$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\eta > 0$, on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B_{x_{i_1}^*, \dots, x_{i_N}^*}(0, \varepsilon) \subseteq B_d(0, \eta)$.
  (b) Montrer que pour toute $x^* \in X^*$, on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $\bigcap_{k=1}^N \ker(x_{i_k}^*) \subseteq \ker(x^*)$.
  (c) En déduire que $\mathrm{Vect}\,\{x_i^*;\ i \in I\} = X^*$.

(2) Montrer que si X est de dimension infinie, alors la topologie faible de X n'est pas métrisable.

(3) Montrer de même que si X est un espace *de Banach* de dimension infinie, alors la topologie préfaible de X^* n'est pas métrisable.

Exercice 19. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert réel H. Soit également $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

(1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  (i) l'adhérence faible de $\{\lambda_n e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H ne contient pas 0;
  (ii) il existe $a_1, \dots, a_d \in H$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{j=1}^{d} \langle a_j, e_n \rangle^2 \geq 1/\lambda_n^2;$$

  (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\lambda_n^2 < \infty$.

(2) D'après (1) l'adhérence faible de l'ensemble $\{\sqrt{n}e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H contient 0. Peut-on trouver une *suite* d'entiers (n_k) telle que $\sqrt{n_k}\, e_{n_k} \xrightarrow{w} 0$?

Exercice 20. Soit X un espace de Banach réel de dimension infinie, et soit $(x_n) \subseteq X$ une suite convergeant faiblement vers 0. On note K l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(1) Montrer que K est borné et contient 0. En déduire que si $z \in K \setminus \{0\}$, alors la droite $\mathbb{R}z$ rencontre ∂K, puis montrer que l'espace vectoriel engendré par ∂K contient K.

(2) On suppose que l'intérieur de K contient 0, et on fixe un point $x \in \partial K$.

(a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non-nulle $x^* \in X^*$ telle que $\langle x^*, x\rangle = \sup_{z\in K} \langle x^*, z\rangle$. (*Séparer x de $\mathring{K}$*). Montrer ensuite que $\langle x^*, x\rangle > 0$.

(b) Justifier l'existence d'un $\varepsilon > 0$ et d'un entier N tel que $\langle x^*, x_n\rangle \leq \langle x^*, x\rangle - \varepsilon$ pour tout $n > N$.

(c) On note A l'enveloppe convexe de $\{x_n;\ n \leq N\}$ et B l'enveloppe convexe de $\{x_n;\ n > N\}$.

(i) Montrer qu'il existe des suites $(a_k) \subseteq A$, $(b_k) \subseteq B$ et $(\lambda_k) \subseteq [0, 1]$ telles que $(1 - \lambda_k)a_k + \lambda_k b_k \to x$.

(ii) Montrer qu'on a nécessairement $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, et en déduire que $x \in A$.

(3) Déduire de (1) et (2) que si $\mathring{K}$ contient 0, alors $X = \mathrm{Vect}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(4) Montrer que K est d'intérieur vide dans X.

Exercice 21. (Théorème de Krein-Šmulian)
Soit X un espace de Banach réel. On note B_{X^*} la boule unité fermée de X, et pour tout $r > 0$, on note rB_{X^*} la boule fermée $\overline{B}(0, r) \subseteq X^*$. Soit également C une partie convexe de X^*. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) C est w^*- fermé dans X^*;

(ii) pour tout $r > 0$, $C \cap rB_{X^*}$ est w^*- fermé.

(1) Démontrer l'implication "facile".

(2) Montrer que si (ii) est vérifiée, alors C est fermé en norme.

(3) Montrer que si (ii) est vérifiée, alors $C \cap B$ est w^*- fermé pour toute boule fermée $B \subseteq X^*$. En déduire que pour prouver l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), on peut supposer que $0 \in C$.

(4) On suppose que (ii) est vérifiée et que $0 \in C$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n := C \cap 2^n B_{X^*}$. On a donc $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(a) Avec les notations de l'exercice 15, on pose $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_\circ$. Montrer que $A \subseteq G^\circ$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x \in X \setminus ((C_{n+1})_\circ + 2^{-n}B_X)$. Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach qu'il existe $\Phi \in X^*$ telle que $\Phi(x) > 1$, $\|\phi\| \leq 2^n$ et $\sup_{z\in(C_{n+1})_\circ} \Phi(z) \leq 1$.

(c) Déduire de (b) qu'on a $(C_n)_\circ \subseteq (C_{n+1})_\circ + 2^{-n}B_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(d) Montrer qu'on a $(C_n)_\circ \subseteq G + 2^{-n+1}B_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(e) En déduire que si une forme linéaire $z^* \in X^*$ appartient à G°, alors $z^* \in (1 + 2^{-n+1}\|z\|)\, C$ pour tout n suffisament grand.
(f) Montrer que $C = G^\circ$.

(5) Conclure.

Exercice 22. Soit K un espace métrique compact. On note $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K, que l'on considère comme une partie de $\mathcal{C}(K)^*$. Montrer que $\mathbf{P}(K)$ est convexe et w^*- compact.

Exercice 23. Soit K un espace métrique compact, et soit $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K. Pour $x \in K$, on note δ_x la masse de Dirac au point x. Montrer que $\operatorname{conv}\big\{\delta_x;\ x \in K\big\}$ est w^*- dense dans $\mathbf{P}(K)$.

Exercice 24. Soit K un espace métrique compact, et soit $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K.

(1) Montrer que si U est un ouvert de K, alors $\mathbf{1}_U$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions continues. Que peut-on dire pour $\mathbf{1}_F$ lorsque F est un fermé de K?
(2) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{P}(K)$, et soit $\mu \in \mathbf{P}(K)$. Montrer que si $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\overline{\lim}\, \mu_n(U) \leq \mu(U)$ pour tout ouvert $U \subseteq K$ et $\underline{\lim}\, \mu_n(F) \geq \mu(F)$ pour tout fermé $F \subseteq K$. En déduire que si $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pour tout borélien $A \subseteq K$ tel que $\mu(\partial A) = 0$.
(3) Est il vrai que si $(\mu_n) \subseteq \mathbf{P}(K)$ et $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pour tout borélien $A \subseteq K$?

Exercice 25. (barycentre d'une mesure)
Soit K un convexe compact dans un espace vectoriel normé X. On note comme d'habitude $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K.

(1) Soit $\nu \in \mathbf{P}(K)$ une combinaison convexe de masses de Dirac : $\nu = \sum_{j=1}^N c_j\delta_{x_j}$ où $c_j \geq 0$ et $\sum_j c_j = 1$. On pose $a := \sum_j c_jx_j \in K$. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, comparer $f(a)$ et $\int_K f\, d\nu$.
(2) Montrer que pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathbf{P}(K)$, il existe un point $b \in K$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction convexe continue $f : K \to \mathbb{R}$, on a $f(b) \leq \int_K f\, d\mu$. (*Utiliser l'Exercice 23.*)
(3) Avec les notations de (2), que peut-on dire pour une fonction *affine* continue $f : K \to \mathbb{R}$? En déduire qu'il existe un *unique* point b vérifiant la propriété précédente. On dit que b est le **barycentre** de la mesure μ.

Exercice 26. (mesures invariantes)
Soit K un espace métrique compact, et soit $T : K \to K$ une application continue.

(1) Soit $a \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n la mesure $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{T^j(a)}$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$, on a
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_K f\,d\mu_n - \int_K f\,d\mu_{n+1}\right) = 0\,.$$

(2) Soit $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K. Montrer qu'il existe une mesure $\mu \in \mathbf{P}(K)$ **invariante** par T, i.e. vérifiant
$$\forall f \in \mathcal{C}(K)\ :\ \int_K (f\circ T)\,d\mu = \int_K f\,d\mu.$$

(3) Montrer qu'on a $\mu\big(T^{-1}(A)\big) = \mu(A)$ pour tout borélien $A \subseteq K$.

Exercice 27. (produits de Riesz)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $n_k := 3^k$. On fixe également une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [-1,1]$.

(1) Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n admet *au plus une* représentation sous la forme $n = \sum_{j=1}^p \varepsilon_j n_{k_j}$, où $k_1 < \cdots < k_p$ et $\varepsilon_j = \pm 1$.

(2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction 2π-périodique $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f_N(t) := \prod_{k=0}^N (1 + \cos(n_k t)).$$

(a) Montrer que f_N est positive.

(b) En utilisant (1), calculer $\widehat{f_N}(0)$ et $\widehat{f_N}(n_k)$ pour $k \in \{0,\dots,N\}$. (*Écrire les cosinus à l'aide des exponentielles correspondantes et développer le produit*).

(3) Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathbb{T}$ telle que $\widehat{\mu}(n_k) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 28. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\Phi_i : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ la forme linéaire (continue) définie par $\Phi_i\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := x_i$. Montrer que la suite (Φ_i) est bornée dans $\ell^\infty(\mathbb{N})^*$, mais ne possède aucune sous-suite w^*- convergente.

Exercice 29. (Théorème de Banach-Mazur)
Le but de l'exercice est de montrer que l'espace $\mathcal{C}([0,1])$ est "universel" pour les espaces de Banach séparables; autrement dit, que tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1])$.

(1) Montrer que si X est un espace de Banach, alors X est isométrique à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$, où $K := (B_{X^*}, w^*)$.

(2) En déduire que tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\Delta)$, où Δ est l'espace de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

(3) Montrer que si E est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}(E)$ est isométrique à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}([0,1])$. (*On peut supposer que* $E \subseteq [0,1]$. *Pour* $f \in \mathcal{C}(E)$, *noter* $Jf : [0,1] \to \mathbb{K}$ *la fonction continue égale à* f *sur* E *et affine sur chaque composante connexe de* $[0,1] \setminus E$.)

(4) Montrer que Δ est homéomorphe à un compact de $\mathbb{R}$.

(5) Conclure.

Exercice 30. (Théorème de Sobczyk)
Soit X un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. On suppose que X est séparable et contient $c_0(\mathbb{N})$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une projection continue de X sur c_0. Dans toute la suite, on note e_n^* les "formes linéaires coordonnées" sur X: si $x = (x_n) \in X \subseteq \ell^\infty$, alors $\langle e_n^*, x\rangle = x_n$. Enfin, on note $c_0^\perp$ l'ensemble des formes linéaires continues $x^* \in X^*$ vérifiant $\langle x^*, z\rangle = 0$ pour tout $z \in c_0$.

(1) Soit B_{X^*} la boule unité fermée de X^*.
  (a) Montrer que si $e^* \in X^*$ est la limite w^* d'une sous-suite $(e_{n_k}^*)$ de (e_n^*), alors $e^* \in c_0^\perp$.
  (b) Soit d une distance définissant la topologie de (B_{X^*}, w^*). Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} d\big(e_n^*, B_{X^*} \cap c_0^\perp\big) = 0$.
  (c) Conclure qu'il existe une suite $(z_n^*) \subseteq c_0^\perp \cap B_{X^*}$ telle que $z_n^* - e_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

(2) Soit $\pi : X \to c_0(\mathbb{N})$ définie par $\pi(x) := \big(\langle e_n^* - z_n^*, x\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que π est une projection continue de X sur c_0.

Exercice 31. (opérateurs p-sommants)
Soient K un espace topologique compact, X un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ et Y un espace de Banach réel. Soit également $p \in [1, \infty[$, et soit $C \in \mathbb{R}^+$. On dit qu'un opérateur $T : X \to Y$ est p**-sommant** avec constante C si on a

$$\forall f_1, \dots, f_N \in X \ : \ \sum_{i=1}^N \|Tf_k\|^p \le C^p \sup_{t\in K} \sum_{i=1}^N |f_i(t)|^p \, .$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

  (i) $T : X \to Y$ est p-sommant avec constante C;
  (ii) il existe une mesure de probabilité (borélienne) μ sur K tels que

$$\forall f \in X \ : \ \|Tf\| \le C \left(\int_K |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} .$$

(1) Montrer que (ii) entraîne (i).

(2) On suppose que (i) est vérifiée.

(a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de X. Pour $F = \{f_1, \dots, f_N\} \in \mathcal{F}$, on définit une fonction $\Phi_F \in \mathcal{C}(K)$ en posant
$$\Phi_F(t) := \sum_{i=1}^{N} \|T(f_k)\|^p - C^p \sum_{i=1}^{N} |f_i(t)|^p.$$
Enfin, on pose $\mathcal{C} := \{\Phi_F;\ F \in \mathcal{F}\}$ et $\mathcal{D} := \{g \in \mathcal{C}(K);\ g > 0 \text{ sur } K\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des cônes convexes, et que $\mathcal{D}$ est ouvert dans $\mathcal{C}(K)$.

(b) Avec les notations de (a), montrer qu'il existe une mesure réelle $\nu \neq 0$ sur K telle que
$$\forall F \in \mathcal{F}\ \forall g \in \mathcal{D}\ :\ \int_K \Phi_F\, d\nu \leq 0 \leq \int_K g\, d\nu\,.$$

(c) Montrer que ν est une mesure positive.

(d) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 32. (Théorème du Minimax)
Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé réel X, et soit L un convexe d'un espace vectoriel réel Y. Soit également $F : K \times L \to \mathbb{R}^+$. On suppose que pour tout $y \in L$, la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est concave continue, et que pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto F(x,y)$ est convexe. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a
$$\sup_{x\in K} \inf_{y\in L} F(x,y) = \inf_{y\in L} \sup_{x\in K} F(x,y).$$

(1) Montrer qu'on a $0 \leq \sup_{x\in K} \inf_{y\in L} F(x,y) \leq \inf_{y\in L} \sup_{x\in K} F(x,y) < \infty$.

(2) On suppose qu'on a $\inf_{y\in L} \sup_{x\in K} F(x,y) < \sup_{x\in K} \inf_{y\in L} F(x,y)$, autrement dit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$\inf_{y\in L} \sup_{x\in K} F(x,y) := c < c + \varepsilon = \sup_{x\in K} \inf_{y\in L} F(x,y).$$

(a) On note $C \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ l'ensemble des fonctions f de la forme
$$f(x) = u(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j F(x, y_j),$$
où $\lambda_j \geq 0$, $\sum_j \lambda_j = 1$, $y_j \in L$ et $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ avec $u(x) \leq c$ pour tout $x \in K$. Montrer que C est une partie convexe de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, et qu'on a $\inf_{x\in K} f(x) \leq -\varepsilon$ pour toute $f \in C$.

(b) Montrer qu'il existe une mesure $\mu \in M_{\mathbb{R}}(K)$ non nulle telle que
$$\sup \left\{ \int_K u\, d\mu;\ u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)\ ,\ u \leq c \right\} < \inf_{y\in L} \int_K F(x,y)\, d\mu(x).$$
(*Commencer par observer que* $\Omega := C + B(0,\varepsilon)$ *ne contient pas* 0.)

(c) Montrer que la mesure μ est positive; et en déduire qu'il existe une mesure de probabilité ν sur K telle que

$$\inf_{y \in L} \int_K F(x,y)\, d\nu(x) > c.$$

(d) En déduire une contradiction en considérant le barycentre de la mesure ν. (*Voir l'Exercice 25.*)

Exercice 33. Soit X un espace de Banach réflexif. Montrer que toute forme linéaire continue sur X *atteint sa norme.* Autrement dit : si $\Phi \in X^*$, alors il existe $x \in B_X$ tel que $\Phi(x) = \|\Phi\|$.

Exercice 34. Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $\Phi \in X^* \setminus \{0\}$. Soit également $a \in X$ vérifiant $\Phi(a) \neq 0$. Montrer qu'on a

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(a)|}{\mathrm{dist}(a, \ker(\Phi))}.$$

Exercice 35. (distances atteintes)
Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, H un sous-espace vectoriel fermé de X différent de X, et $a \in X \setminus H$.

(1) On suppose que H est réflexif. Montrer qu'il existe un point $h \in H$ tel que $\|a - h\| = \mathrm{dist}(a, H)$.

(2) Dans cette question, on suppose que H est le noyau d'une forme linéaire continue $\Phi : X \to \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 34, Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

  (i) Il existe $h \in H$ tel que $\mathrm{dist}(a, h) = \|a - h\|$;
  (ii) Il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\Phi(x)| = \|\Phi\|$.

(3) Dans cette question, on prend $X := \mathcal{C}([0,1])$. Soit $a := \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1, et soit

$$H := \left\{ h \in \mathcal{C}([0,1]);\ \int_0^{1/2} h(t)\, dt = \int_{1/2}^1 h(t)\, dt \right\}.$$

Montrer qu'il n'existe aucune $h \in H$ telle que $\|a - h\|_\infty = \mathrm{dist}(a, H)$.

Exercice 36. (Théorème de James, cas séparable)
Soit X un espace de Banach réel *séparable.* On suppose que toute forme linéaire continue sur X atteint sa norme, autrement dit que pour toute $x^* \in X^*$, il existe $x \in B_X$ tel que $\langle x^*, x \rangle = \|x^*\|$. Le but de l'exercice est de montrer que X est réflexif.

(1) Dans cette question, on veut établir le fait suivant : *si* $(x_n^*)_{n\geq 1}$ *une suite quelconque d'éléments de* B_{X^*}*, alors*

$$\sup_{x\in B_X} \overline{\lim}\, \langle x_n^*, x\rangle \geq \inf \Big\{ \|x^*\|;\ x^* \in \overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n\geq 1\}\Big\}.$$

(a) Pour tout entier $k\geq 1$, on pose $C_k := \overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n\geq k\}$. Soit également $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k^*)_{k\geq 1} \subseteq B_{X^*}$ avec $z_k^* \in C_k$ pour tout k telle que, si on pose $u_0^* := 0$ et $u_k^* := \sum_{n=1}^k 2^{-n} z_n^*$ pour $k\geq 1$, alors

$$\forall k\geq 0\ \forall z^* \in C_{k+1}\ :\ \|2^k u_k^* + z_{k+1}^*\| \leq \|2^k u_k^* + z^*\| + 2^{-k-1}\varepsilon.$$

(b) Avec les notations de (a), montrer que $x^* := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} z_n^*$ appartient à $\overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n\geq 1\}$.

(c) Montrer que $2^k x^* - 2^k u_k^* \in C_{k+1}$ pour tout $k\geq 0$, et en déduire que

$$\forall k\geq 0\ :\ \|2^{k+1}u_{k+1}^* - 2^k u_k^*\| \leq 2^k \|x^*\| + 2^{-k-1}\varepsilon.$$

(d) Par hypothèse sur X, il existe $x\in B_X$ tel que $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. Montrer que $\forall m\geq 0\ :\ 2^{m+1}\langle u_{m+1}^*, x\rangle \leq (2^{m+1}-1)\,\langle x^*, x\rangle + \varepsilon$.

(e) Montrer que $\|x^*\| \leq \inf_{m\geq 0} \langle 2^m x^* - 2^m u_m^*, x\rangle + \varepsilon \leq \overline{\lim}\, \langle x_n, x\rangle + \varepsilon$.

(f) Conclure.

(2) Déduire de (1) que si (x_n^*) est une suite d'éléments de B_{X^*}, alors

$$\forall x^{**}\in B_{X^{**}}\ :\ \overline{\lim}\,\langle x^{**}, x_n^*\rangle \leq \sup_{x\in B_X} \overline{\lim}\,\langle x_n^*, x\rangle.$$

(3) On suppose que X *n'est pas réflexif*, et on cherche à obtenir une contradiction. Soit $x^{**}\in B_{X^{**}}$ tel que $x^{**}\notin X$.

(a) Justifier l'existence de $x^{***}\in B_{X^{***}}$ tel que $\langle x^{***}, x^{**}\rangle > 0$ et $\forall x\in X$: $\langle x^{***}, x\rangle = 0$.

(b) En utilisant la séparabilité de X et le Théorème de Goldstine, montrer qu'il existe une suite $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ telle que $\langle x^{**}, x_n^*\rangle \to \langle x^{***}, x^{**}\rangle$ et $\forall x\in X\ :\ \langle x_n^*, x\rangle \to 0$.

(c) En déduire une contradiction.

Exercice 37. (Théorème de Bishop-Phelps)
Soit X un espace de Banach réel. On note NA l'ensemble des $\Phi\in X^*$ qui atteignent leur norme; autrement dit, une $\Phi\in X^*$ appartient à NA si et seulement si il existe $x\in B_X$ tel que $\Phi(x) = \|\Phi\|$. Le but de l'exercice est de montrer que NA est dense dans X^*.

(1) Soient $\Phi_0, \Psi \in X^*$ avec $\|\Phi_0\| = 1 = \|\Psi\|$, et soit $\varepsilon > 0$. On suppose qu'on a $|\Psi(u)| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in B_X \cap \ker(\Phi_0)$. Montrer qu'on a $\|\Phi_0 + \Psi\| \leq 2\varepsilon$ ou $\|\Phi_0 - \Psi\| \leq 2\varepsilon$. (*Commencer par montrer qu'il existe* $\widetilde{\Psi} \in X^*$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $\|\widetilde{\Psi}\| \leq \varepsilon$ *et* $\widetilde{\Psi} - \Psi = \lambda\,\Phi_0$. *Montrer ensuite que* $\big|1 - |\lambda|\big| \leq \varepsilon$, *puis discuter selon le signe de* λ.)

(2) Soit $\Phi_0 \in X^*$ avec $\|\Phi_0\| = 1$. Soit également $\varepsilon > 0$. On pose $A := \frac{1}{\varepsilon} B_X \cap \ker(\Phi_0)$ et $C := \mathrm{conv}\,\big(B_X \cup A\big)$. On suppose qu'il existe $x \in B_X$ tel que $x \notin \mathring{C}$. Montrer qu'il existe $\Phi \in \mathrm{NA}$ telle que $\|\Phi - \Phi_0\| \leq 2\varepsilon$.

(3) Soit $\Phi_0 \in X^*$ vérifiant $\|\Phi_0\| = 1$ et soit $\varepsilon > 0$. On définit $C = \mathrm{conv}\,\big(B_X \cup A\big)$ comme dans (2). Soit également $z_0 \in B_X$ tel que $\Phi_0(z_0) > 0$. Enfin, soit $k > 0$.

   (a) On définit une relation binaire $\preceq$ sur B_X de la façon suivante :
   $$x \preceq y \iff \Phi_0(y) \geq \Phi_0(x) \quad \text{et} \quad \|y - x\| \leq k\,(\Phi_0(y) - \Phi_0(x)).$$
   Vérifier que $\preceq$ est une relation d'ordre.

   (b) Soit $x \in B_X$ tel que $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(z_0)$. On suppose que $x \in \mathring{C}$.
      (i) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x + \alpha z_0 \in C$.
      (ii) On écrit $x + \alpha z_0 = (1-\lambda)y + \lambda a$ où $y \in B_X$, $a \in A = \frac{1}{\varepsilon} B_X \cap \ker(\Phi_0)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Montrer qu'on a $\|y - x\| \leq (1 + 1/\varepsilon)(\lambda + \alpha)$ et $\Phi_0(y) - \Phi_0(x) \geq (\lambda + \alpha)\Phi_0(z_0)$.

   (c) Montrer que si k est convenablement choisi au départ, alors aucun $x \in B_X$ vérifiant $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(z_0)$ et $x \in \mathring{C}$ n'est maximal pour la relation d'ordre $\preceq$.

(4) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 38. Soit X un espace de Banach réflexif. Montrer que toute suite décroissante de convexes fermés bornés non-vides de X a une intersection non-vide.

Exercice 39. Soit X un espace de Banach réflexif, et soit $C \subseteq X$ un ensemble convexe fermé. Montrer que si $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue vérifiant $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$, alors f est minorée et atteint sa borne inférieure. (*On peut utiliser l'Exercice 38; ou pas.*) En particulier, si $x \in X$, alors il existe un point $z \in C$ tel que $\mathrm{dist}(x, C) = z$.

Exercice 40. Soit X un espace de Banach uniformément convexe, et soit $C \subseteq X$ un ensemble convexe fermé.

(1) Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un unique point $z \in C$ tel que $\|z - x\| = \mathrm{dist}(x, C)$. On note ce point $p_C(x)$.

(2) Montrer que l'application $p_C : X \to C$ est continue.

Exercice 41. Soit X un espace de Banach. On suppose qu'il existe un espace de Banach réflexif Z et une surjection linéaire continue T de Z sur X. Montrer que X est réflexif.

Exercice 42. Soient X et Y deux espaces de Banach, avec X réflexif. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, alors $T(B_X)$ est fermée dans Y.

Exercice 43. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe fermé $C \subseteq X^*$ qui n'est pas w^*- fermé.

Exercice 44. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces de Banach, on définit leur **somme directe** ℓ^2 par

$$\bigoplus_{\ell^2} X_n := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n;\ \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\},$$

et on munit $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ de la norme définie par $\|(x_n)\| = (\sum_0^\infty \|x_n\|^2)^{1/2}$.

(1) Montrer que $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ est un espace de Banach.
(2) Montrer que le dual de $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ s'identifie isométriquement à $\bigoplus_{\ell^2} X_n^*$.
(3) Montrer que si les X_n sont réflexifs, alors $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ est réflexif.

Exercice 45. Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On considère les assertions suivantes :

(i) T est compact;
(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ telle que $x_n \xrightarrow{w} 0$, on a que $\|Tx_n\| \to 0$.

Montrer que (i) $\Longrightarrow$ (ii), et que (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) si X est réflexif.

Exercice 46. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite (A_n) d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que $0 < \mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L^1(\Omega, \mu)$ n'est pas réflexif. (*Poser* $f_n := \frac{1}{\mu(A_n)} \mathbf{1}_{A_n}$ *et montrer que* (f_n) *ne possède aucune sous-suite faiblement convergente dans* $L^1(\mu)$).

Exercice 47. (Théorème d'Eberlein-Šmulian)
Soit X un espace de Banach. On suppose que toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ possède une sous-suite w- convergente. Le but de l'exercice est de montrer que X est réflexif.

(1) Montrer que si $E \subseteq X^{**}$ est un sous-espace de dimension finie, alors on peut trouver un ensemble fini $\Lambda \subseteq B_{X^*}$ tel que

$$\forall z^{**} \in E \ :\ \sup_{x^*\in\Lambda} |\langle z^*, x^*\rangle| \geq \frac{1}{2}\, \|z^{**}\|.$$

(*Commencer par choisir* $z_1^{**},\dots,z_N^{**}\in S_E$ *– la sphère unité de* E *– tels que* $S_E\subseteq \overline{B}(z_1^{**},1/4)\cup\cdots\cup\overline{B}(z_N^{**},1/4)$*, puis* $x_1^*,\dots,x_N^*\in B_{X^*}$ *tels que* $|\langle z_k^{**},x_k^*\rangle|\geq 3/4$ *pour* $k=1,\dots,N$.)

(2) Soit $x^{**}\in B_{X^{**}}$ quelconque. En utilisant (1) et le Théorème de Goldstine, montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ de parties finies de B_{X^*} et une suite $(x_n)_{n\geq 0}\subseteq B_X$ avec $x_0=0$ telles que les choses suivantes aient lieu :

- $\forall n\geq 0\ \forall z^{**}\in \mathrm{vect}(x^{**}-x_0,\dots,x^{**}-x_n)\ :\ \sup\limits_{x^*\in\Lambda_n}|\langle z^{**},x^*\rangle|\geq \frac{1}{2}\,\|z^{**}\|$;
- $\forall n\geq 1\ \forall x^*\in\Lambda_0\cup\cdots\cup\Lambda_{n-1}\ :\ |\langle x^{**}-x_n,x^*\rangle|<2^{-n}$;
- la suite (x_n) est w-convergente, $x_n\xrightarrow{w}x\in X$.

(3) On garde les notations de (2), et on pose $\Lambda:=\bigcup_{i\geq 0}\Lambda_i$.

(a) Justifier que $x^{**}-x\in\overline{\mathrm{vect}}\,\{x^{**}-x_i;\ i\in\mathbb{N}\}$, et en déduire que

$$\|x^{**}-x\|\leq 2\sup_{x^*\in\Lambda}|\langle x^{**}-x,x^*\rangle|.$$

(b) Montrer que par ailleurs, on a $\langle x^{**}-x,x^*\rangle=0$ pour tout $x^*\in\Lambda$.

(4) Conclure.

Exercice 48. (Théorème de Banach-Sacks)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert.

(1) Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de H convergeant faiblement vers 0.

(a) Montrer que (z_n) possède une sous-suite $(z'_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$\forall n\ \forall i<n\ :\ |\langle z'_n,z'_i\rangle|<\frac{1}{n}\cdot$$

(b) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall n\geq 1\ :\ \left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z'_i\right\|\leq\frac{C}{n}\cdot$

(2) Montrer que toute suite bornée $(x_n)\subseteq H$ possède une sous-suite qui converge (en norme) au sens de Cesàro.

Exercice 49. (un théorème ergodique)
Soit X un espace de Banach, et soit $T\in\mathcal{L}(X)$ vérifiant $\|T\|\leq 1$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$T_n=\frac{1}{n+1}(I+T+\cdots+T^n)\,.$$

(1) Montrer que pour tout $z\in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim_{n\to\infty}\|T_nz\|=0$;

(ii) il existe une suite (n_k) telle que $T_{n_k}z\to 0$ faiblement;

(iii) $z\in\overline{\mathrm{Im}(I-T)}$.

(2) On suppose que X est réflexif. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une suite (n_k) telle que $(T_{n_k}x)$ converge faiblement vers un point fixe de T.
(3) On suppose que X est réflexif. Déduire de (1) et (2) qu'on a
$$X = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$$
et que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)$ converge (en norme) vers la projection de x sur $\ker(I - T)$ associée à cette décomposition.

Exercice 50. (Théorème de Krein-Milman)
Dans tout l'exercice, X est un espace vectoriel topologique localement convexe sur $\mathbb{R}$, et K est un compact convexe non-vide de X. On rappelle qu'un point $x \in K$ est un **point extrémal** de K si x ne peut pas s'écrire comme barycentre de deux points de K différents de x; autrement dit : si $u, v \in K$ et $x \in [u, v]$, alors $u = x$ ou $v = x$. Le but de l'exercice est de montrer que K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

(0) Vérifier que le résultat est bien vrai lorsque K est un rectangle, un triangle ou un disque dans le plan.
(1) On dit qu'un ensemble $E \subseteq K$ est une **partie extrémale** de K s'il possède la propriété suivante : si $u, v \in K$ et $]u, v[\cap E \neq \emptyset$, alors $u \in E$ et $v \in E$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties extrémales de K compactes et non-vides. Montrer que $\mathcal{E}$ contient un élément minimal pour l'inclusion.
(2) Montrer que si E est une partie extrémale de K et si $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, alors
$$E_\Phi := \left\{ x \in E;\ \Phi(x) = \sup_E \phi \right\}$$
est une partie extrémale de K.
(3) Déduire de (1) et (2) que K possède au moins un point extrémal.
(4) Soit $\Phi : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Montrer que l'ensemble K_Φ est un compact convexe non-vide, et que tout point extrémal de K_Φ est un point extrémal de K.
(5) Soit K_0 un compact convexe de K, avec $K_0 \neq K$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $\Phi : X \to \mathbb{R}$ telle que $K_\Phi \cap K_0 = \emptyset$.
(6) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 51. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le Théorème de Krein-Milman (*Exercice 50*), montrer que toute matrice $A \in M_d(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\|A\| \leq 1$ est combinaison convexe de matrices orthogonales.

Exercice 52. Dans cet exercice, K est un espace métrique compact. On veut déterminer les points extrémaux de $B_{M(K)}$.

(1) Montrer que si m est une mesure borélienne positive sur K, alors il existe un *plus grand* ouvert $O \subseteq K$ tel que $m(O) = 0$. (*Penser à la propriété de Lindelöf.*) Le complémentaire de cet ouvert s'appelle le **support** de la mesure m, et se note $\mathrm{supp}(m)$.

(2) Soit μ un point extrémal de $B_{M(K)}$.

  (a) Montrer que pour tout borélien $A \subseteq K$, on a $|\mu|(A) = 0$ ou $|\mu|(A^c) = 0$.

  (b) En déduire que $\mathrm{supp}(|\mu|)$ est réduit à 1 point.

(3) Montrer qu'une mesure $\mu \in B_{M(K)}$ est un point extrémal de $B_{M(K)}$ si et seulement si elle est de la forme $\mu = c\,\delta_x$, où $x \in K$ et $|c| = 1$.

Exercice 53. Soit $L^1 := L^1(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que B_{L^1} ne possède aucun point extrémal.

(2) En déduire qu'il n'existe aucun espace de Banach X tel que L^1 soit isométrique à X^*.

Exercice 54. (Théorème de Banach-Stone)

Le but de l'exercice est de montrer que si K_1 et K_2 sont des espaces métriques compacts tels que les espaces $\mathcal{C}(K_1)$ et $\mathcal{C}(K_2)$ sont isométriques, alors K_1 et K_2 sont homéomorphes.

(1) Soient Y_1 et Y_2 des espaces de Banach, et soit $T : Y_2 \to Y_1$ une isométrie bijective. Montrer que si $y \in B_{Y_2}$ est un point extrémal de B_{Y_2}, alors Ty est un point extrémal de B_{Y_1}.

(2) Soient K_1 et K_2 des espaces métriques compacts, et soit $J : \mathcal{C}(K_1) \to \mathcal{C}(K_2)$ une isométrie bijective. Montrer qu'il existe une application $\phi : K_2 \to K_1$ et une fonction $\theta : K_2 \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall t \in K_2 \ : \ |\theta(t)| = 1 \quad \text{et} \quad J^*\delta_t = \theta(t)\,\delta_{\phi(t)}.$$

(*Utiliser l'Exercice 52.*)

(3) Démontrer le résultat annoncé.