# Feuille d'exercices n° 9

**Exercice 1.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p, q$ tels que $1 \leq p < q < \infty$.

(1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints, et soit $(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Soit également $r \in [1, \infty[$. A quelle condition la fonction $f = \sum_0^\infty \alpha_n \mathbf{1}_{A_n}$ appartient-elle à $L^r$?

(2) On suppose qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints tels que $\varepsilon_0 \leq \mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^q$ qui n'appartient pas à $L^p$.

(3) On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints tels que $\mu(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^p$ qui n'appartient pas à $L^q$.

**Exercice 2.** Soit $p \in [1, \infty]$. Trouver une fonction $f$ telle que $f \in L^p(]0, \infty[)$ mais $f$ n'appartient à aucun $L^q$ pour $q \neq p$.

**Exercice 3.** Trouver une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ qui ne soit pas bornée.

**Exercice 4.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f$ une fonction mesurable sur $\Omega$. Montrer que si $f \in L^1 \cap L^\infty$, alors $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

**Exercice 5.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe deux constante $a < \infty$ et $c > 0$ telle que

$$\forall t > 0 \;:\; \mu\big(\{x \in \Omega;\ |f(x)| > t\}\big) \leq a\, e^{-ct}\,.$$

Montrer que $f \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

**Exercice 6.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne, et soit $p \in [1, \infty[$. On suppose que les fonctions $\Delta$ et $\theta$ définies par $\Delta(t) := f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - f(t)$ et $\theta(t) := f(t)\sin t$ appartiennent à $L^p(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(1) Soit $\delta$ vérifiant $0 < \delta < \frac{\pi}{4}\cdot$ Dessiner l'ensemble $E := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [k\pi - \delta, k\pi + \delta]$.

(2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin t}$ est (bien définie et) bornée sur $\mathbb{R} \setminus E$, et en déduire que $f_{|\mathbb{R}\setminus E} \in L^p(\mathbb{R} \setminus E)$.

(3) Montrer que l'ensemble $E + \frac{\pi}{2}$ est contenu dans $\mathbb{R} \setminus E$. En déduire, en écrivant $f(t) = f(t + \frac{\pi}{2}) - \Delta(t)$, que $f_{|E} \in L^p(E)$.

(4) Conclure.

**Exercice 7.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^1$. On suppose que $(f_n)$ converge presque partout vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(1) Montrer que si $(f_n)$ est bornée dans $L^1$, alors $f \in L^1$ et $\|f\|_1 \leq \underline{\lim}\|f_n\|_1$.
(2) En appliquant le théorème de convergence dominée à $g_n = |f_n - f| - (|f_n| - |f|)$, montrer que si $f \in L^1$ et si $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$, alors $f_n \to f$ en norme $L^1$.
(3) Montrer qu'on peut avoir $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ sans que $(f_n)$ converge vers $f$ pour la norme $L^1$.

**Exercice 8.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [1, \infty[$. Soit également $(f_n)$ une suite de fonctions de $L^p$. On suppose que la suite $(f_n)$ converge simplement vers une fonction $f$, et que $(f_n)$ est bornée dans $L^p$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on peut écrire, quand $n \to \infty$ :

$$\|f_n\|_p^p = \|f\|_p^p + \|f_n - f\|_p^p + o(1)\,.$$

(1) Montrer que $f \in L^p$.
(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon < \infty$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \ : \ (1+t)^p \leq 1 + \varepsilon + C_\varepsilon t^p\,.$$

Montrer ensuite qu'on a $(a+b)^p \leq (1+\varepsilon)a^p + C_\varepsilon b^p$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, puis que

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \ : \ \big||u+v|^p - |u|^p\big| \leq \varepsilon\,|u|^p + C_\varepsilon\,|v|^p\,.$$

(3) On écrit $f_n = g_n + f$, et pour $\varepsilon > 0$ on pose

$$G_{n,\varepsilon} := \Big(\big||g_n + f|^p - |g_n|^p - |f|^p\big| - \varepsilon\,|g_n|^p\Big)^+\,.$$

Montrer à l'aide de (2) et du théorème de convergence dominée qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega G_{n,\varepsilon}\, d\mu = 0\,.$$

(4) Déduire de (3) qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p\big|\, d\mu = 0\,,$$

et conclure.

**Exercice 9.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [1, \infty]$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F} := \{f \in L^p;\ |f(x)| \leq 1 \text{ presque partout}\}$ est fermé dans $L^p$.

**Exercice 10.** (1ère inégalité de Clarkson)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [2, \infty[$. Le but de l'exercice est de montrer que pour toutes fonctions $f, g \in L^p$, on a l'inégalité suivante :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \left( \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right).$$

(1) Montrer que dans le cas $p = 2$, on a même égalité.
(2) Montrer que la fonction $\varphi(t) := (t^2 + 1)^{p/2} - t^p - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, et en déduire que

$$\forall \alpha, \beta \geq 0 \ : \ \alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2}.$$

(3) Déduire de (1) et de la convexité de la fonction $t \mapsto t^{p/2}$ que

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \ : \ \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} \big( |a|^p + |b|^p \big).$$

(4) Conclure.

**Exercice 11.** (inégalité de Hanner)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in ]1, \infty[$. Soient également $f, g \in L^p$ à valeurs réelles. Le but de l'exercice est de montrer les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \quad \text{si } p \leq 2, \\ \|f+g\|_p^p + \|f-g\|^p &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \quad \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(1) Pour $r \in ]0, 1]$, on pose

$$\alpha(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \quad \text{et} \quad \beta(r) = \left[ (1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1} \right] r^{1-p}.$$

(a) Soit $c \in ]0, 1]$. Montrer que $\phi_c(r) = \alpha(r) + \beta(r)\, c^p$ admet un maximum en $r = c$ si $p \leq 2$, et un minimum en $r = c$ si $p \geq 2$.
(b) Montrer qu'on a $\beta(r) \leq \alpha(r)$ si $p \leq 2$ et $\beta(r) \geq \alpha(r)$ si $p \geq 2$.
(c) Déduire de (a) et (b) que si $c \in ]0, 1]$, alors on a pour tout $r \in ]0, 1]$:

$$\begin{aligned} \alpha(r) + \beta(r)\, c^p &\leq \alpha(r)\, c^p + \beta(r) \quad \text{si } p \leq 2, \\ \alpha(r) + \beta(r)\, c^p &\geq \alpha(r)\, c^p + \beta(r) \quad \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(2) Montrer que si $A, B \in \mathbb{R}$, alors on a pour tout $r \in ]0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \alpha(r)\, |A|^p + \beta(r)\, |B|^p &\leq |A+B|^p + |A-B|^p \quad \text{si } p \leq 2, \\ \alpha(r)\, |A|^p + \beta(r)\, |B|^p &\geq |A+B|^p + |A-B|^p \quad \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(3) On suppose que $\|g\|_p \leq 1$ et $g \neq 0$ et on pose $c := \|g\|_p$, de sorte que $c \in ]0, 1]$. Déduire de (2) qu'on a pour tout $r \in ]0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\geq \alpha(r) + \beta(r)\, c^p \quad \text{si } p \leq 2, \\ \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p &\leq \alpha(r) + \beta(r)\, c^p \quad \text{si } p \geq 2. \end{aligned}$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.
(5) Pour $p = 2$, montrer directement qu'on a

$$\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = \left(\|f\|_2 + \|g\|_2\right)^2 + \left(\|f\|_2 - \|g\|_2\right)^2 .$$

**Exercice 12.** (uniforme convexité de $L^p$ pour $2 \le p < \infty$)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in [2, \infty[$. En utilisant au choix l'Exercice 11 ou l'Exercice 10, montrer que si $(f_n)$ et $(g_n)$ sont deux suites dans $L^p$ telles que $\|f_n\|_p$, $\|g_n\|_p$ et $\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p$ convergent vers la même limite, alors $\|f_n - g_n\|_p \to 0$.

**Exercice 13.** (uniforme convexité de $L^p$ pour $1 < p < \infty$)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in ]1, \infty[$. Le but de l'exercice est de montrer que si $(f_n)$ et $(g_n)$ sont deux suites dans $L^p$ telles que $\|f_n\|_p$, $\|g_n\|_p$ et $\left\|\frac{f_n+g_n}{2}\right\|_p$ convergent vers la même limite, alors $\|f_n - g_n\|_p \to 0$.

(1) Soit $\alpha : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\alpha(u,v) := \frac{|u|^p + |v|^p}{2} - \left|\frac{u+v}{2}\right|^p .$$

  (a) Montrer que $\alpha(u,v) \ge 0$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, et que $\alpha(u,v) > 0$ si $u \ne v$. (Il peut être utile de distinguer les cas $|u| = |v|$ et $|u| \ne |v|$.)
  (b) En déduire que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $C_\eta < \infty$ telle que l'implication suivante ait lieu :

$$|u-v|^p \ge \eta\left(|u|^p + |v|^p\right) \implies |u|^p + |v|^p \le C_\eta\, \alpha(u,v).$$

  (On pourra considérer $\theta := \inf\big\{\alpha(x,y);\ |x|^p + |y|^p = 1\ ,\ |x-y|^p \ge \eta\big\}$.)

(2) Soient $f, g \in L^p$. Montrer que pour tout ensemble mesurable $E \subseteq \Omega$, on a

$$\int_E |f-g|^p d\mu \le 2^{p-1} \int_E \left(|f|^p + |g|^p\right) d\mu.$$

(3) Soient $f, g \in L^p$, et soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|f\|_p, \|g\|_p \le M$. Montrer que pour tout $\eta > 0$, on a

$$\|f-g\|_p^p \le 2\eta M^p + 2^{p-1} C_\eta \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} - \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p\right).$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 14.** (projection sur un convexe fermé)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in ], \infty[$. Soit également $C$ une partie convexe fermée (non vide) de $L^p$, et soit $u \in L^p$. On pose

$$d := \mathrm{dist}(u, C) = \inf\big\{\|\phi - u\|_p;\ \phi \in C\big\}.$$

(1) Soit $(\phi_n)$ une suite quelconque d'éléments de $C$ telle que $\|\phi_n - u\|_p \to d$.
   (a) Montrer que $\left\|\frac{\phi_k+\phi_l}{2} - u\right\|_p \to d$ quand $k, l \to \infty$.
   (b) En déduire, à l'aide de l'Exercice 13, que la suite $(\phi_n)$ est de Cauchy dans $L^p$.
(2) Montrer qu'il existe une unique $\phi \in C$ telle que $\|\phi - u\|_p = \mathrm{dist}(u, C)$.

**Exercice 15.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $p \in ]1, \infty[$. Soient également $f, h \in L^p$ à valeurs réelles. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$N(t) := \|f + th\|_p^p.$$

(1) Montrer que la fonction $\varphi(x) := |x|^p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\varphi'(x)$.
(2) Montrer que si $t \in [0, 1]$, alors

$$(1 + t)\,|f|^p - t\,|f - h|^p \leq |f + th|^p \leq t\,|f + h|^p + (1 - t)\,|f|^p.$$

(3) Montrer que la fonction $N$ est dérivable en 0, avec

$$N'(0) = \int_\Omega p\,|f|^{p-2} f\,h\,d\mu\,.$$

**Exercice 16.** (Hölder entraîne Minkowski)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $f$ et $g$ deux fonctions mesurables positives sur $\Omega$. Soit également $p \in ]1, \infty[$. En observant que

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)|\,|f(x) + g(x)|^{p-1}$$

pour tout $x \in \Omega$ et en utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer l'inégalité de Minkowski $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

**Exercice 17.** (inégalité de Jensen)
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathring{I}$, on peut trouver une fonction affine $a : I \to \mathbb{R}$ telle que $a(t_0) = \varphi(t_0)$ et $\forall t \in I\ :\ a(t) \leq \varphi(t)$.
(2) Montrer que si $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$, et si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable telle que $f(\Omega) \subseteq I$ et telle que $\varphi \circ f$ est intégrable, alors $\int_\Omega f\,d\mu \in I$ et

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\,d\mu.$$

**Exercice 18.** Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Jensen (Exercice 17) montrer que si $x_1, \dots, x_N \in I$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des réels positifs tels que $\sum_1^N \lambda_i = 1$, alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(x_i).$$

**Exercice 19.** Montrer qu'on peut déduire l'inégalité de Hölder de l'inégalité de Jensen.

**Exercice 20.** (inégalité de Carleman)
Soit $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable strictement positive. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)\, dt\right) dx \leq e \int_0^\infty f(t)\, dt.$$

(1) Vérifier que $\exp\left(-\frac{1}{x}\int_0^x \log(t)\, dt\right) = \frac{e}{x}$ pour tour $x > 0$.
(2) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log\big(tf(t)\big)\, dt\right) \leq \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\, dt$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 21.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soient $p, q, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Montrer que si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $fg \in L^r$ et $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

**Exercice 22.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $F$ une fonction mesurable strictement positive sur $\Omega$. On pose

$$J := \left\{t \in [1, \infty[;\ F \in L^t\right\}.$$

(1) En utilisant l'Exercice 21, montrer que $J$ est un intervalle.
(2) Montrer que la fonction $t \mapsto \log\left(\|F\|_t^t\right)$ est convexe sur $J$.

**Exercice 23.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Montrer que pour toute $f \in L^\infty$, on a $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$.

**Exercice 24.** Montrer que la fonction $\log(\Gamma)$ est convexe sur $(0, \infty)$ en utilisant uniquement la définition de la convexité et l'inégalité de Hölder.

**Exercice 25.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si $f' \in L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $p > 1$, alors $f$ est uniformément continue.

**Exercice 26.** Soit $p$ tel que $1 < p < \infty$, et soit $q$ l'exposant conjugué. Soit également $f \in L^p(]0, \infty[)$, et soit $F : ]0, \infty[ \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

(1) Montrer que pour tout $A > 0$, il existe une constante $C_A$ telle que
$$\forall x \geq A \ : \ \int_0^x |f(t)|\, dt \leq C_A + x^{1/q} \left( \int_A^\infty |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$
(2) Montrer qu'on a $F(x) = o(x^{1/q})$ quand $x \to \infty$.

**Exercice 27.** (inégalité de Wirtinger)
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0 = f(1)$.

(1) Montrer que $I_1 := \int_0^1 f(t)f'(t) \operatorname{cotan}(\pi t)\, dt$ et $I_2 := \int_0^1 f(t)^2(1+\operatorname{cotan}^2(\pi t))\, dt$ existent, et qu'on a $I_1 = \frac{\pi}{2} I_2$.
(2) En déduire l'inégalité suivante :
$$\|f\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \|f'\|_{L^2}.$$

**Exercice 28.** (splines)

Dans tout le problème, $\sigma = (x_0, \ldots, x_N)$ est une subdivision d'un intervalle $[a, b]$. On note $\mathcal{S}_\sigma$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiales de degré au plus 3. Les fonctions de $\mathcal{S}_\sigma$ s'appellent des **splines d'ordre** 3.

(1) Le but de cette question est détablir le résultat suivant : *si $y_0, \ldots, y_N, y'_0, y'_N$ sont $N+3$ réels donnés, alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifiant $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, $\varphi'(a) = y'_0$ et $\varphi'(b) = y'_N$.*
  (a) Montrer que $\mathcal{S}_\sigma$ est un espace vectoriel de degré $N + 3$.
  (b) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifie $\varphi(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{0; \ldots n\}$, alors
$$\int_a^b \varphi''(t)^2 dt = \varphi'(b)\varphi''(b) - \varphi'(a)\varphi''(a).$$
  On pourra commencer par vérifier qu'on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'(t)\varphi'''(t)\, dt = 0$ pour tout $i < N$.
  (c) Démontrer le résultat souhaité.

(2) Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0) = 0 = g(1)$. montrer qu'on a $\|g\|_\infty \leq \|g''\|_{L^2}$.
(3) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $\varphi$ l'unique fonction de $\mathcal{S}_\sigma$ vérifiant $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i$, $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = b$. Le but de cette question est de montrer qu'on a
$$\|f - \varphi\|_\infty \leq C \, \|f''\|_{L^2} \, h_\sigma^{3/2},$$
où $h_\sigma = \max\{x_{i+1} - x_i;\ 0 \leq i < N\}$ est le pas de la subdivision $\sigma$.

(a) Montrer qu'on a

$$\|f''\|_{L^2}^2 = \|(f-\varphi)''\|_{L^2}^2 + \|\varphi''\|_{L^2}^2 \, .$$

On pourra intégrer $(f''-\varphi'')\varphi''$ par parties sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

(b) Montrer que pour tout $i \in \{0; \dots ; n-1\}$, on a

$$\sup_{t\in[x_i,x_{i+1}]} |(f-\varphi)(t)| \leq \|(f-\varphi)''\|_{L^2}\, h_i^{3/2} \, ,$$

où on a posé $h_i = x_{i+1} - x_i$.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 29.** ("principe de dualité")

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. On note $\mathcal{M}^+(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables positives sur $\Omega$. Soit également $p \in [1, \infty[$, et soit $q$ l'exposant conjugué.

(1) Montrer que si $F \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ est dans $L^p$, alors

$$(*) \qquad \|F\|_p = \sup \left\{ \int_X FG\, d\mu;\ G \in \mathcal{M}^+(\Omega)\ ,\ \|G\|_q = 1 \right\} \, .$$

Pour l'une des deux inégalités, on pourra considérer $G := \frac{F^{p/q}}{||F||_p^{p/q}}$.

(2) Dans cette question, on suppose que la mesure $\mu$ est sigma-finie, *i.e.* qu'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables $(\Omega_n)$ telle que $\mu(\Omega_n) < \infty$ pour tout $n$ et $\Omega = \bigcup_0^\infty \Omega_n$. Le but de la question est de montrer que $(*)$ est valable pour *toute* $F \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, même si $F$ n'est pas dans $L^p$.

(a) Soit $F \in \mathcal{M} + (\Omega)$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n := \mathbf{1}_{A_n} F$, où $A_n := \Omega_n \cap \{x \in \Omega;\ F(x) \leq n\}$. Montrer que $F_n \in L^p$.

(b) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 30.** (forme intégrale de Minkowski)

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $g : I \to [0, \infty]$ une fonction borélienne. On suppose que $g$ est de la forme

$$g(t) = \int_J g_s(t)\, ds,$$

où $J$ est un autre intervalle de $\mathbb{R}$ et la fonction $(t, s) \mapsto g_s(t)$ est borélienne $\geq 0$. Soit également $p \in [1, \infty]$. En utilisant le "principe de dualité" (Exercice 29), montrer qu'on a

$$\|g\|_p \leq \int_J \|g_s\|_p\, ds.$$

**Exercice 31.** (inégalité de Hardy)
Soit $p \in ]1, \infty[$. Si $f \in L^p(]0, \infty[)$, on définit une fonction $Tf : ]0, \infty[ \to \mathbb{C}$ par

$$Tf(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

(1) Justifier la définition, et vérifier que $Tf(x) = \int_0^1 f(sx)\, ds$.
(2) En utilisant l'Exercice 30, montrer que $Tf \in L^p$, avec

$$\|Tf\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\, \|f\|_{L^p}.$$

(3) La question précédente montre que $T$ est une application linéaire continue de $L^p$ dans $L^p$. En considérant des fonctions $f$ de la forme $f(t) := \frac{1}{t^\alpha} \mathbf{1}_{]0,1[}(t)$, montrer que la norme de $T$ est exactement égale à $\frac{p}{p-1}$.

**Exercice 32.** Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite *en escalier* si elle nulle en dehors d'un intervalle compact $[a, b]$ et en escalier au sens usuel sur $[a, b]$. Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$.

**Exercice 33.** (Riemann-Lebesgue)
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de $f$ :

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

(1) Montrer que $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, et que que l'application (linéaire) $f \mapsto \widehat{f}$ est continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
(2) En déduire, *en utilisant l'Exercice 32*, que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

**Exercice 34.** Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se donne une partition $\mathcal{P}_n$ de $\Omega$ en un nombre fini d'ensembles mesurables de mesure strictement positive. Pour toute $f \in L^1$, on définit une fonction $T_n f : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$T_n f := \sum_{I \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\mu(I)} \left( \int_I f\, d\mu \right) \mathbf{1}_I\,.$$

(1) Montrer que $T_n f \in L^1$ pour toute $f \in L^1$, et que l'application (linéaire) $T_n : L^1 \to L^1$ est continue, avec $\|T_n\| \leq 1$.
(2) Dans cette question, on suppose que $\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^d$, que $\mu$ est la mesure de Lebesgue, et que $\delta_n := \sup \{\mathrm{diam}(I);\ I \in \mathcal{P}_n\}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.
   (a) Montrer que si $f$ est une fonction continue sur $\Omega$, alors $T_n f \to f$ uniformément.

(b) Montrer que $T_n f \to f$ en norme $L^1$ pour toute $f \in L^1$.