

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. Soient, $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R, h) \subseteq \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des (x, y) . Calculer le volume de $\mathcal{C}(R, h)$.

Exercice 2. Soit B un borélien de \mathbb{R}^2 , et soit $h > 0$. En considérant B comme un borélien de \mathbb{R}^3 contenu dans le plan des (x, y) , on note $\mathcal{C}(B, h) \subseteq \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h et de base B . Calculer le volume de $\mathcal{C}(B, h)$ en fonction de h et de $\lambda_2(B)$.

Exercice 3. Soit $R > 0$. On pose $B(R) := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2\}$. Calculer $\lambda_4(B(R))$.

Exercice 4. Soit $f :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Montrer que les deux intégrales itérées $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ existent mais *ne sont pas égales*. Ceci contredit-il le théorème de Fubini?

Exercice 5. Calculer l'intégrale $J := \int_{]0, 1[\times]0, 1[} \frac{dx dy}{x+y}$.

Exercice 6. Calculer $J := \int_{\Omega} \frac{dx dy}{x^2 y}$, où $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$.

Exercice 7. Soit $a > 0$, et soit $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq a \text{ et } x + y \leq a\}$. Calculer l'intégrale $J := \int_{\Omega} e^{2x+y} dx dy$.

Exercice 8. Soit $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$. Calculer $J := \int_{\Omega} x^3 y z^2 dx dy dz$.

Exercice 9. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) := \frac{e^{-y} \sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}$ est intégrable sur $\Omega :=]0, \infty[\times]0, \infty[$, et calculer $J := \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne, et soit G_f le graphe de f . Montrer que $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 11. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^2 . On suppose que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = 0$. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0$.

Exercice 12. (produit de convolution)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . Montrer que

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y) dy$$

est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction (presque partout définie) $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in I \times I$.

(2) En déduire, en considérant $\int_{I \times I} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy$, qu'on a

$$\int_I fg \geq \left(\int_I f \right) \times \left(\int_I g \right).$$

Exercice 14. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^d , et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que $\varphi(0) = 0$. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x)) dx = \int_0^\infty \varphi'(t) \lambda_d(\{f > t\}) dt.$$

Exercice 15. (formule d'intégration par parties "générale")

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur \mathbb{R} , et soient F et G les fonctions définies par $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) := \int_0^x g(t)dt$. Montrer à l'aide du théorème de Fubini que pour tous $a < b$ dans \mathbb{R} , on a $\int_a^b f(x)(G(x) - G(a))dx = \int_a^b (F(b) - F(x))g(x)dx$, et en déduire la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx.$$

Exercice 16. Soit $\phi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une bijection continue strictement croissante (avec donc $\phi(0) = 0$), et soient $a, b \geq 0$.

(1) Expliquer pourquoi $\int_0^a \phi(x) dx = \lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq a \text{ et } y \leq \phi(x)\})$, et montrer que $\int_0^b \phi^{-1}(y) dy = \lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq b \text{ et } y > \phi(x)\})$.

(2) En déduire que si $b = \phi(a)$, alors $\int_0^a \phi(x) dx + \int_0^b \phi^{-1}(y) dy = ab$.

(3) Démontrer l'**inégalité de Young** :

$$\int_0^a \phi(x) dx + \int_0^b \phi^{-1}(y) dy \geq ab.$$

(Distinguer les cas $b \geq \phi(a)$ et $b \leq \phi(a)$, i.e. $a \geq \phi^{-1}(b)$.)

Exercice 17. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^2 . Pour $\alpha > 0$, on note D_α le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon α dans \mathbb{R}^2 , et on pose

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \int_{D_\alpha} f(x, y) dx dy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(\alpha) d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

Exercice 18. Soit $C :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 positive, décroissante et tendant vers 0 à l'infini. Soit également $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\Phi(x) > 0$ presque partout. Pour $\alpha > 0$, on pose $\mathcal{D}_\alpha := \{\Phi \leq \alpha\}$. Montrer que pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} C(\Phi(x)) f(x) dx = \int_0^\alpha g(\alpha) d\alpha,$$

où

$$g(\alpha) := -C'(\alpha) \int_{\mathcal{D}_\alpha} f(x) dx.$$

Exercice 19. Soient f et g deux fonctions positives sur un intervalle $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, avec de plus $g(t) > 0$ sur $]a, b]$. On suppose que f est croissante et que g est décroissante. On définit $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_a^x g(t) dt.$$

Enfin, on pose

$$h(x) := \frac{F(x)}{G(x)}.$$

(0) Justifier que $h(x)$ est bien défini sur $]a, b]$.

(1) Vérifier que si $x, y \in [a, b]$, alors

$$F(y)G(x) - F(x)G(y) = \int_a^x g(u) du \int_x^y f(v) dv - \int_x^y g(v) dv \int_a^x f(u) du.$$

(2) Montrer que la fonction h est croissante sur $]a, b]$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) := ye^{-y^2(1+x^2)}$. Calculer l'intégrale "itérée" $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dy \right) dx$, et en déduire la valeur de l'intégrale $J := \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Exercice 21. Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu} du \right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J := \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt.$$

Exercice 22. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J := \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (1) Effectuer le changement de variable $x := 1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx$, et en déduire qu'on a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2 - 1} dx.$$

- (2) Pour $y > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2}$.
 (3) Soit $x \in]0, 1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2 \frac{\log(x)}{x^2 - 1}.$$

- (4) Calculer J en utilisant (2) et (3).

Exercice 23. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J := \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt.$$

- (1) Soit $\Omega :=]0, 1[\times]0, 1[\times]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^3$, et soit $g = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$g(x, y, t) := \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}.$$

Montrer qu'on a

$$J = \int_\Omega g(x, y, t) dx dy dt.$$

- (2) Vérifier que pour $(x, y, t) \in \Omega$ tel que $x \neq y$, on a

$$g(x, y, t) = \frac{1}{x^2 - y^2} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2} \right).$$

- (3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_{\Omega} g(x, y, t) dx dy dt = \frac{\pi}{2} \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{x+y}.$$

- (4) Calculer J .

Exercice 24. En considérant l'intégrale double $\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)} dx dy$, calculer l'intégrale

$$J := \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2} dt.$$

Exercice 25. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J := \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

- (1) Soit $y > 0$ fixé.

- (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(2x)e^{-yx}$ est intégrable sur $]0, \infty[$ et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(2x) e^{-yx} dx = \frac{y}{y^2 + 4}.$$

- (b) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, en déduire que

$$\int_0^\infty \sin^2 x e^{-yx} dx = \frac{2}{y(y^2 + 4)}.$$

- (2) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x, y) := y \sin^2 x e^{-xy}$. En utilisant (1b), calculer l'intégrale "itérée"

$$J' := \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y) dx \right) dy.$$

- (3) Calculer J .

Exercice 26. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

- (1) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$.

- (a) Montrer que f est intégrable sur $]0, A[\times]0, \infty[$ pour tout $A > 0$, et qu'on a

$$\int_{]0, A[\times]0, \infty[} f(x, y) dx dy = \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

(b) Montrer que pour $A > 0$ et $y > 0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x, y) dx = \frac{1}{1+y^2} - \cos A \frac{e^{-yA}}{1+y^2} - \sin A \frac{ye^{-yA}}{1+y^2}.$$

(2) Calculer J .

Exercice 27. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R} . En utilisant le changement de variable $(u, v) := (x + y, x - y)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} f(x - y) e^{-(x+y)} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-|v|} dv.$$

Exercice 28. Calculer l'intégrale $I := \int_{\{u > v > 0\}} (u^4 - v^4) e^{-(u+v)^2} du dv$ en posant $(x, y) := (u^2 + v^2, 2uv)$.

Exercice 29. Soit $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $(x, y) \mapsto \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω .

Exercice 30. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ la somme d'une série entière convergente dans le disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

- (1) Pour $r \in [0, 1[$, exprimer $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ à l'aide de r et des coefficients a_n .
- (2) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x + iy)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

Exercice 31. Démontrer la formule d'intégration "en coordonnées cylindriques" : pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}} f(r \sin \theta, r \cos \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Exercice 32. Démontrer la formules d'intégration "en coordonnées sphériques" : pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[} f(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Exercice 33. Pour $a, b, c > 0$, on pose

$$\mathcal{E}(a, b, c) := \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

- (1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1, 1, 1)$?
- (2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a, b, c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 34. Pour $a, b, c, h > 0$, on pose

$$\mathcal{H}(a, b, c, h) := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; |z| \leq h \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer le volume de $\mathcal{H}(1, 1, 1, h')$ pour tout $h' > 0$, et en déduire le volume de $\mathcal{H}(a, b, c, h)$ pour tous a, b, c, h .

Exercice 35. (centre de gravité)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un borélien borné et tel que $\lambda_d(\Omega) > 0$. Le **centre de gravité** de Ω est le point $g_\Omega \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\overrightarrow{Og_\Omega} = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_{\Omega} \overrightarrow{Ox} d\lambda_d(x).$$

(L'intégrale d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^d est définie "coordonnée par coordonnée".)

- (1) Justifier la définition.
- (2) Montrer que g_Ω est l'unique point $g \in \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\int_A \overrightarrow{gx} d\lambda_d(x) = 0.$$

- (3) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une bijection affine telle que $\Phi(\Omega) = \Omega$, alors $\Phi(g_\Omega) = g_\Omega$.
- (4) Dans cette question, on prend $d = 2$. Montrer que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est un rectangle ou un triangle, alors g_Ω est ce à quoi on s'attend.

Exercice 36. Soit Σ un borélien de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. En considérant Σ comme une partie de \mathbb{R}^3 contenue dans le plan des (y, z) , on note $\widehat{\Sigma}$ le "solide de révolution" obtenu en faisant tourner Σ autour de l'axe des z .

- (1) Faire un dessin.
- (2) En intégrant en coordonnées cylindriques, montrer que le volume de $\widehat{\Sigma}$ est donné par la formule

$$\lambda_3(\widehat{\Sigma}) = 2\pi \int_{\Sigma} y dy dz.$$

- (3) Que devient cette formule dans le cas où Σ est le sous-graphe d'une fonction borélienne $f : I \rightarrow [0, \infty]$, où I est un intervalle contenu dans \mathbb{R}^+ ?
- (4) On suppose que Σ est borné et que $\lambda_2(\Sigma) > 0$, et on note g_Σ le centre de gravité de Σ (cf l'Exercice 35). Montrer que la formule de (2) peut également s'écrire

$$\lambda_3(\widehat{\Sigma}) = 2\pi \lambda_2(\Sigma) \operatorname{dist}(g_\Sigma, (0z)).$$

Exercice 37. On veut calculer l'intégrale $J := \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{1 - x^2 y^2}$.

- (1) Soit $\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u + v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u, v) := \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u} \right).$$

Montrer que Φ est un difféomorphisme de Ω sur le carré $\Omega' :=]0, 1[\times]0, 1[$.

- (2) Calculer J en posant $(x, y) := \Phi(u, v)$.

Exercice 38. On veut calculer l'intégrale $J := \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{1 - xy}$.

- (1) En utilisant le changement de variables $(u, v) := \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{1 - xy} = 2 \int_C \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2},$$

où C est le carré de sommets $(0, 0)$, $(1/2, -1/2)$, $(1, 0)$ et $(1/2, 1/2)$.

- (2) On pose $C_+ := \{(u, v) \in C; v \geq 0\}$ et $I := \int_{C_+} \frac{du dv}{1 - u^2 + v^2}$.

(a) Montrer qu'on a

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

(b) Calculer les deux intégrales apparaissant dans (a) en posant $u := \sin t$ dans la première et $u := \cos(2t)$ dans la deuxième.

- (3) Calculer J .

Exercice 39. Utiliser l'exercice 38 pour calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 40. On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\forall s > 0 : \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

(1) Soit $\Omega :=]0, \infty[\times]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^2$. Montrer que la formule $\Phi(u, v) := (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ définit un difféomorphisme de Ω sur Ω .

(2) En déduire que pour tout $s \in]0, 1[$, on a

$$\int_{\Omega} \left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)} \frac{dx dy}{x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

(3) Déduire de (2) que pour tout $s \in]0, 1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}.$$

(4) Calculer l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (3).

(5) Déduire de (4) la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 41. Pour $a, b > 0$, on pose

$$J(a, b) := \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} du.$$

(1) Soit $\mathcal{D} :=]0, \infty[\times]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}^2$. Montrer que la formule $\Phi(u, t) := (ut, (1-u)t)$ définit un difféomorphisme de $]0, 1[\times]0, \infty[$ sur \mathcal{D} .

(2) En déduire que pour tous $a, b > 0$ et pour toute fonction borélienne positive $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1} dx dy = J(a, b) \int_0^{\infty} t^{a+b-1} f(t) dt.$$

(3) Déduire de (2) l'identité

$$J(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

(4) En posant $u = \sin^2 \theta$, montrer qu'on a

$$J(a, b) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta.$$

(5) Calculer $J(1/2, 1/2)$ puis $\Gamma(1/2)$.

Exercice 42. (volume de la boule unité de \mathbb{R}^d)

Dans tout l'exercice on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d , et \mathbb{B}_d la "boule unité" de \mathbb{R}^d , i.e. $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1\}$. On pose $V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$. Le but de l'exercice est d'établir la formule

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

- (1) Vérifier que la formule est correcte pour $d = 1, 2, 3$.
 (2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_{\lambda}^{\infty} e^{-t} dt$.
 (3) Pour $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d; \|x\|^2 \leq t\}$ et $V(t) := \lambda_d(\mathbb{B}(t))$.

(a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \cdots dx_d = \int_0^{\infty} e^{-t} V(t) dt.$$

(b) Montrer qu'on a $V(t) = t^{d/2} V_d$ pour tout $t > 0$.

(c) En déduire la formule

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 \cdots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) V_d.$$

- (4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 43. (volume d'une boule ℓ^p)

Soit p tel que $1 < p < \infty$. Pour $R > 0$, on note $\mathbb{B}_d^p(R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^d muni de la norme $\|\cdot\|_p$:

$$\mathbb{B}_d^p(R) = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_p \leq R\}.$$

Le but de l'exercice est de calculer le volume de $\mathbb{B}_d^p(R)$ à l'aide de la fonction Gamma; plus précisément, de montrer qu'on a

$$\lambda_d(\mathbb{B}_d^p(R)) = (2R)^d \frac{\Gamma(1 + 1/p)^d}{\Gamma(1 + d/p)}.$$

- (1) Montrer qu'on a $\lambda_d(\mathbb{B}_d^p(R)) = R^d \lambda_d(\mathbb{B}_d^p(1))$ pour tout $R > 0$.
 (2) Montrer qu'on a

$$\Gamma(1 + 1/p) = \int_0^{\infty} e^{-t^p} dt;$$

et en déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|_p^p} dx = 2^d \Gamma(1 + 1/p)^d.$$

- (3) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|_p^p} dx = \int_0^1 \lambda_d(\mathbb{B}_d^p(-\log(s))) ds$$

- (4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 44. (intégration d'une fonction radiale)

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Pour $r > 0$, on pose $V_d(r) := \lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$, où $\mathbb{B}_d(r) := \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq r\}$.

- (1) Montrer qu'on a $V_d(r) = r^d V_d(1)$.
 (2) Soit $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive de classe \mathcal{C}^1 , décroissante et tendant vers 0 à l'infini.
 (a) Montrer que pour tout $u \in [0, \infty[$, on peut écrire $\varphi(u) = - \int_u^\infty \varphi'(t) dt$.
 (b) En déduire l'identité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = - \int_0^\infty \varphi'(r) V_d(r) dr.$$

- (c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|) dx = d V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r) dr.$$

Exercice 45. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale J telle que $J^{-1}AJ$ soit diagonale, puis utiliser le changement de variable $x := Ju$ pour établir la formule

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax, x \rangle} dx = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Exercice 46. En utilisant l'Exercice 45, montrer que si $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques définies positives, alors

$$\forall \theta \in]0, 1[: \det((1 - \theta)A + \theta B) \geq \det(A)^{1-\theta} \det(B)^\theta.$$

Exercice 47. (inégalité de Prekopa-Leindler)

Soit θ vérifiant $0 < \theta < 1$. Le but de l'exercice est d'établir pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ le résultat suivant, qu'on notera $(PK)_d$: si $f, g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes ≥ 0 sur \mathbb{R}^d vérifiant

$$(*_d) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d : h((1 - \theta)x + \theta y) \geq f(x)^{1-\theta} g(y)^\theta$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g \right)^\theta.$$

- (1) Dans cette question, on veut montrer le résultat suivant : si A, B sont des boréliens de \mathbb{R} alors, pour tout borélien C tel que

$$(1 - \theta)A + \theta B \subseteq C,$$

on a

$$\lambda_1(C) \geq (1 - \theta)\lambda_1(A) + \theta \lambda_1(B).$$

- (a) Dans cette sous-question, on suppose que A et B sont compacts.

- (i) Montrer que si on pose $a := \min A$ et $b := \max B$, alors l'intersection $((1 - \theta)a + \theta B) \cap ((1 - \theta)A + \theta b)$ contient au plus 1 point.
- (ii) Démontrer le résultat souhaité dans ce cas. (Observer que l'ensemble $(1 - \theta)A + \theta B$ contient $((1 - \theta)a + \theta B) \cup ((1 - \theta)A + \theta b)$.)
- (b) On admet que pour tout borélien $E \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1(E) = \sup \{ \lambda_1(K); K \subseteq E, K \text{ compact} \}.$$

Démontrer le résultat souhaité pour A, B boréliens quelconques.

- (2) Montrer que pour toute fonction borélienne $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} u = \int_0^{\infty} \lambda_1(\{u > t\}) dt.$$

- (3) En utilisant (1) et (2), montrer que si $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions vérifiant $(*_1)$, alors $\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$; et en déduire $(PL)_1$.
- (4) On identifie \mathbb{R}^{d+1} à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $u_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u_s(x) := u(s, x)$. Montrer que si $f, g, h : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont des fonctions vérifiant $(*_{d+1})$, alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, les fonctions f_s, g_s, h_s vérifient $(*_d)$.
- (5) Démontrer $(PL)_d$ par récurrence sur la dimension d . (Il sera utile de penser à l'inégalité de Hölder.)

Exercice 48. (inégalité de Brunn-Minkowski)

Dans cet exercice, on note $|A|$ plutôt que $\lambda_d(A)$ la mesure de Lebesgue d'un borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Le but de l'exercice est de montrer que si K et L sont des compacts de \mathbb{R}^d tels que $|K|, |L| > 0$, alors

$$|K + L|^{1/d} \leq |K|^{1/d} + |L|^{1/d}.$$

- (1) Justifier que si A, B sont des compacts de \mathbb{R}^d et si $s, t \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble $sA + tB := \{sx + ty; x \in A, y \in B\}$ est compact.
- (2) En utilisant l'inégalité de Prekopa-Leindler (Exercice 47), montrer que si A et B sont des compacts de \mathbb{R}^d , alors

$$\forall \theta \in]0, 1[: |(1 - \theta)A + \theta B| \leq |A|^{1-\theta} |B|^\theta.$$

- (3) Conclure en appliquant (2) à $A := \frac{1}{|K|^{1/d}} K$, $B := \frac{1}{|L|^{1/d}} L$ et un θ bien choisi.