

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^\alpha}\right)^t$ est intégrable sur $]1, \infty[$.

Exercice 2. Soit $a > 0$, et soit $u : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $u(t)/\log(t)$ admet une limite $l > 1$ quand $t \rightarrow \infty$ (la valeur $l = \infty$ n'est pas exclue). Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-u(t)}$ est intégrable sur $[a, \infty[$.

Exercice 3. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $[0, \infty[$.

- (1) Peut-on affirmer que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$?
- (2) Montrer que si $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow \infty$, alors cette limite est nécessairement égale à 0.
- (3) Montrer que si f est *uniformément* continue, alors $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 4. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que si la fonction f' est intégrable sur $[0, \infty[$, alors $f(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, et soit $\lambda = a + ib$.

- (1) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$.
- (2) En déduire qu'en notant $\text{sgn}(b)$ le signe de b , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x-\lambda} = i\pi \text{sgn}(b).$$

Exercice 7. (Formule des résidus)

Dans tout l'exercice, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, où les polynômes P et Q sont à coefficients réels. On suppose que Q n'a pas de racines réelles, et que $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$. On suppose également que toutes les racines complexes de Q sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est égal à 1.

- (1) Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R} .
- (2) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ les racines complexes de Q à partie imaginaire strictement positive.

(a) Justifier qu'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{x - \lambda_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\bar{c}_j}{x - \bar{\lambda}_j},$$

où les c_j sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients c_j sont donnés par $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$.

(c) Montrer également qu'on a $\sum_{j=1}^N c_j + \sum_{j=1}^N \bar{c}_j = 0$.

(3) Avec les notations de (2), et en utilisant l'Exercice 6, établir la **formule des résidus** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2i\pi \sum_{j=1}^N \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}.$$

(4) *Application numérique* : calculer $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_0^{\pi/2} \log(\sin t) dt$.

(1) Justifier que I a bien un sens.

(2) En remarquant que $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$, montrer qu'on a $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t) dt$.

(3) En déduire que $2I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t \sin t) dt$, puis que

$$I = -\frac{\pi}{2} \log(2) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2t) dt.$$

(4) Montrer qu'on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin u) du = I$, puis que $\int_0^{\pi} \log(\sin u) du = 2I$.

(5) calculer I .

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, et soit $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Soit également $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, et que la fonction G définie par $G(x) := \int_a^x g(t) dt$ est bornée sur \mathbb{R} . Montrer qu'on a

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)g(\lambda\phi(t)) dt = 0.$$

(*Suggestion* : écrire $f(t)g(\lambda\phi(t)) = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times g(\lambda\phi(t))\phi'(t)$.)

Exercice 10. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) := \sin(t^{1/4})e^{-t^{1/4}}$.

(1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $[0, \infty[$. Dans la suite, on pose $I_p := \int_0^{\infty} t^p f(t) dt$.

(2) Montrer que I_p est la partie imaginaire de $J_p := 4 \int_0^{\infty} u^{4p+3} e^{-\lambda u} du$, où λ est un nombre complexe à déterminer.

(3) Calculer I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt$.

Exercice 12. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable sur \mathbb{R} et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\widehat{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la **transformée de Fourier** de u , qui est la fonction définie par

$$\widehat{u}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

- (1) Justifier la définition.
- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue identiquement nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
 - (a) Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^1 , alors $\widehat{f}'(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda)$.
 - (b) Si f est de classe \mathcal{C}^k , exprimer $\widehat{f^{(k)}}(\lambda)$ en fonction de $\widehat{f}(\lambda)$.
 - (c) Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^∞ , alors $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Pour $x > 0$, on pose $R(x) := \int_x^\infty e^{-t^2} dt$.

- (1) Justifier que $R(x) < \infty$.
- (2) Montrer qu'on a $R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.
- (3) En déduire que $R(x)$ est équivalent à $\phi(x) := \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 15. En utilisant une méthode semblable à celle de l'Exercice 14, trouver des équivalents simples de $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ et $g(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$ quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) := \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $F_n(x) := \int_0^x f_n(t) dt$.

- (1) Calculer $F_1(x)$.
- (2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2nF_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + (2n - 1)F_n(x).$$

- (3) En déduire $F_2(x)$ et $F_3(x)$.
- (4) Calculer $F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ en posant $t = \tan u$.

Exercice 17. Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Soit également $\lambda > 0$.

- (1) On suppose qu'on a $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a, b]$. Montrer que si on pose $G := 1/F'$, alors

$$\left| \int_a^b e^{iF(t)} dt \right| \leq \frac{2}{\lambda} + \left| \int_a^b G'(t) e^{iF(t)} dt \right|.$$

- (2) On suppose qu'on a $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a, b]$, et que la fonction F' est monotone. Établir l'inégalité

$$\left| \int_a^b e^{iF(t)} dt \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

Exercice 18. Soit $\beta > 0$. Calculer l'intégrale $I := \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$.

Exercice 19. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) := \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}$. Montrer que si $2\beta - \alpha = 2$, alors $\int_{]0,1[} f = \int_{]1,\infty[} f$.

Exercice 20. Soit $a > 0$. On pose $J(a) := \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-a(t+\frac{1}{t})} dt$.

- (1) Montrer que $J(a) = \int_1^\infty (t^{-1/2} + t^{-3/2}) e^{-a(t+\frac{1}{t})} dt$.
- (2) Déterminer la valeur de $J(a)$ en posant $u = \sqrt{a}(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$ et en admettant que $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 21. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne ou bien positive, ou bien intégrable sur \mathbb{R} , alors

$$\int_{\mathbb{R}^*} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

Exercice 22. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable admettant des limites finies α et β respectivement en 0 et en ∞ . Soient également $a, b > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt$ existe et vaut $(\beta - \alpha) \log(b/a)$. (On pourra commencer par vérifier que pour tous $0 < u, v < \infty$, on a $\int_u^v \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt = \int_{av}^{bv} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{au}^{bu} \frac{f(x)}{x} dx$.)

Exercice 23. Montrer que si $u : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , décroissante et tendant vers 0 à l'infini, alors $\int_a^\infty u(t) e^{it} dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Exercice 24. Montrer qu'on a $\int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$.

Exercice 25. Montrer que $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$ en utilisant l'inégalité $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

Exercice 26. Montrer que $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée, mais que la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, \infty[$.

Exercice 27. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sin t + t^\alpha}$ est convergente.

Exercice 28. Pour $\alpha \in]0, 1]$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 29. Pour $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ en comparant avec une intégrale.

Exercice 30. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ en comparant avec des intégrales.

Exercice 31. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n := \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$. Les W_n sont appelées les **intégrales de Wallis**.

- (1) Montrer qu'on a $W_{n+2} = W_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x (\sin x)^n] \cos x dx$, et en déduire la relation de récurrence

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- (2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

- (3) Montrer que la suite (W_n) est décroissante, puis que $W_{n+1} \sim W_n$ quand $n \rightarrow \infty$. Déterminer ensuite un équivalent simple de $W_{2k} W_{2k+1}$ en utilisant (2), et conclure que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Exercice 32. Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $n!$ quand $n \rightarrow \infty$:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := \log \left(\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \right)$. Montrer qu'on a

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

et en déduire que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente.

- (2) Déduire de (1) qu'il existe une constante C telle que $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (3) Déterminer la constante C en utilisant les intégrales de Wallis (Exercice 31) et conclure.

Exercice 33. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

- (1) En utilisant convenablement le Théorème de convergence monotone, montrer qu'on a

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k, \quad \text{où } J_k := \int_0^k \left(1 - \frac{t^2}{k^2} \right)^{k^2} dt.$$

- (2) Vérifier que $J_k = k W_{2k^2+1}$ où les W_n sont les intégrales de Wallis, puis calculer I en utilisant l'Exercice 31.

Exercice 34. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

- (1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $W_k := \int_0^{\pi/2} (\cos t)^k dt$ et $I_k := \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos t)^k dt$. Montrer que si $k \geq 2$, alors

$$W_k = \frac{k(k-1)}{2} W_{k-2} - \frac{k^2}{2} I_k \quad \text{et} \quad W_k = \frac{k-1}{k} W_{k-2}.$$

- (2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n := \frac{I_{2n}}{W_{2n}}$.

(a) Montrer à l'aide de (1) que si $n \geq 1$, alors $\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \frac{1}{2n^2}$.

(b) Montrer que ε_n tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. (*Suggestion* : commencer par montrer que pour tout $0 < \delta < \pi/2$ fixé, on a $\int_\delta^{\pi/2} (\cos t)^k dt = o(W_k)$ quand $k \rightarrow \infty$.)

- (3) Déterminer la valeur de S .