

## Feuille d'exercices n° 4

**Exercice 1.** (inclusion-exclusion, bis)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) < \infty$ , et soient  $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{B}$ . Justifier l'identité  $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^N A_j} = \mathbf{1} - \prod_{j=1}^N (\mathbf{1} - \mathbf{1}_{A_j})$ , et en déduire la formule

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left( \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \mu(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) \right).$$

**Exercice 2.** (intégrale et aire sous le graphe)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Pour toute fonction borélienne  $f : I \rightarrow [0, \infty]$ , on pose

$$\text{SG}(f, I) := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq y < f(x)\}.$$

- (1) Montrer que  $\text{SG}(f, I)$  est un borélien de  $\mathbb{R}^2$ , pour toute fonction borélienne positive  $f$ .
- (2) Montrer que pour toute fonction borélienne  $f : I \rightarrow [0, \infty]$ , on a

$$\int_I f d\lambda_1 = \lambda_2(\text{SG}(f, I)).$$

(Commencer par traiter le cas d'une fonction  $f$  étagée.)

**Exercice 3.** Soit  $(\mu_i)_{i \in I}$  une famille de mesures sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathfrak{B})$ , et soit  $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$  (i.e.  $\mu$  est la mesure définie par  $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A)$  pour tout  $A \in \mathfrak{B}$ ). Montrer que pour toute fonction mesurable  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , on a  $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i \in I} \int_{\Omega} f d\mu_i$ .

**Exercice 4.** (intégration par rapport à une mesure discrète)

Que devient la formule de l'Exercice 3 lorsqu'on prend  $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mu_i = a_i \delta_{x_i}$ , où  $(a_i)_{i \in I}$  est une famille de nombres réels positifs et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de points de  $\Omega$ ?

**Exercice 5.** (intégration par rapport à une mesure à densité)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $w$  une fonction mesurable positive sur  $\Omega$ . On note  $\nu$  la mesure de densité  $w$  par rapport à  $\mu$  :

$$\nu(A) = \int_A w d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}.$$

Montrer que pour toute fonction mesurable  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , on a

$$\int_{\Omega} f d\nu = \int_{\Omega} fw d\mu.$$

**Exercice 6.** Déterminer la limite de  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  quand  $s$  tend vers  $1^+$ .

**Exercice 7.** Déterminer la limite de  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2x}$  quand  $x$  tend vers  $0^+$ .

**Exercice 8.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu(\Omega) = 1$ . Soient également  $m, M \in \mathbb{R}$  avec  $0 < m \leq M$ , et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. On suppose qu'on a  $m \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in \Omega$ .

(1) En observant que la fonction  $\phi := \frac{(f-m)(M-f)}{f}$  est positive, établir l'inégalité

$$\int_{\Omega} f d\mu + mM \int_{\Omega} \frac{1}{f} d\mu \leq m + M.$$

(2) En déduire qu'on a

$$\left( \int_{\Omega} f d\mu \right) \left( \int_{\Omega} \frac{1}{f} d\mu \right) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}.$$

**Exercice 9.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , à valeurs complexes. On suppose qu'on a  $\sum_0^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty$ . Montrer que pour presque tout  $x \in \Omega$ , la série  $\sum f_n(x)$  est absolument convergente.

**Exercice 10.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables  $(B_i)_{i \in I}$  telle que  $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$  et  $\sum_{i \in I} \int_{B_i} |f| d\mu < \infty$ . Montrer que la fonction  $f$  est intégrable.

**Exercice 11.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels positifs, et soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  la fonction définie comme suit :  $f(x) \equiv a_n$  sur  $x \in [n, n+1[$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que  $f$  est borélienne, puis calculer  $\int_{[0, \infty[} f d\lambda_1$  en fonction des  $a_n$ .

**Exercice 12.** (Borel-Cantelli, bis)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}$ . On suppose qu'on a  $\sum_1^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ . Montrer que la fonction  $f = \sum_0^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$  vérifie  $f(x) < \infty$  pp, et en déduire que  $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$ . (On rappelle que  $\overline{\lim} A_n$  est l'ensemble des  $x \in \Omega$  appartenant à une infinité d'ensembles  $A_n$ .)

**Exercice 13.** (inégalité de Hölder)

Dans tout l'exercice,  $p$  et  $q$  sont des nombres réels positifs vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- (1) montrer que pour tous  $a, b \in [0, \infty]$ , on a  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .
- (2) En déduire que si  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  est un espace mesuré, alors, pour toutes fonctions mesurables  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , on a

$$\int_{\Omega} fg \, d\mu \leq \left( \int_{\Omega} f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\Omega} g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**; et pour  $p = 2 = q$ , elle s'appelle plutôt **inégalité de Cauchy-Schwarz**.)

- (3) Comment s'écrit l'inégalité de Hölder lorsque  $\Omega = \{1, \dots, d\}$  avec la mesure de comptage?

**Exercice 14.** Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres complexes. Soient également  $p$  et  $q$  des nombres réels positifs vérifiant  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On suppose que les séries  $\sum |x_n|^p$  et  $\sum |y_n|^q$  sont convergentes. Montrer que la série  $\sum x_n y_n$  est absolument convergente.

**Exercice 15.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction intégrable. Montrer qu'on a  $|\int_{\Omega} f \, d\mu| = \int_{\Omega} |f| \, d\mu$  si et seulement si il existe une constante  $\lambda$  telle que  $|\lambda| = 1$  et  $f(x) = \lambda |f(x)|$  presque partout.

**Exercice 16.** Soit  $\lambda > 0$ , et soit  $\mu$  la mesure sur  $(\mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$  définie par

$$\mu := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \delta_k.$$

- (1) Calculer  $\mu(\mathbb{R}^+)$ .
- (2) Montrer qu'on a  $\int_{\mathbb{R}^+} x \, d\mu(x) = \lambda$  et  $\int_{\mathbb{R}^+} x^2 \, d\mu(x) = \lambda + \lambda^2$ .
- (3) Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto e^{ix}$  est intégrable par rapport à  $\mu$ , puis calculer  $\int_{\mathbb{R}^+} e^{itx} \, d\mu(x)$ .

**Exercice 17.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction intégrable. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$A_n := \{x \in \Omega; |f(x)| \geq n\}.$$

- (1) Dans cette question, on veut montrer que la série  $\sum \mu(A_n)$  est convergente.
  - (a) Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $B_p := \{x \in \Omega; p \leq |f(x)| < p+1\}$ . Montrer qu'on a  $\sum_{p=1}^{\infty} p \mu(B_p) < \infty$ .
  - (b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $\mu(A_n)$  à l'aide des  $\mu(B_p)$ ,  $p \geq n$ .

- (c) Démontrer le résultat souhaité.
- (2) Dans cette question, on suppose de plus que la fonction  $f$  est bornée et que la mesure  $\mu$  est *finie*. Montrer qu'on a  $\int_{\Omega} e^{|f|} d\mu < \infty$ , et en déduire que  $\mu(A_n) = O(e^{-n})$ .

**Exercice 18.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\Omega$ , à valeurs complexes.

- (1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n := \{x \in \Omega; \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$ .
- (a) Vérifier que la suite  $(A_n)$  est croissante, et déterminer  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .
- (b) En considérant la mesure  $\nu$  définie par  $\nu(A) := \int_A |f| d\mu$ , en déduire la limite de  $\int_{\Omega \setminus A_n} |f| d\mu$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Montrer que pour tout ensemble mesurable  $B \subset \Omega$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\int_B |f| d\mu \leq n \mu(B) + \int_{\Omega \setminus A_n} |f| d\mu.$$

- (2) En utilisant (1), montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver  $\delta > 0$  tel que

$$\forall B \in \mathfrak{B} : \mu(B) < \delta \implies \int_B |f| d\mu < \varepsilon.$$

- (3) On suppose que  $\Omega = \mathbb{R}$  et que  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Montrer que la fonction  $F$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19.** Dans tout l'exercice  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  est un espace mesuré.

- (1) Soit  $f$  une fonction *étagée* positive sur  $\Omega$ , qu'on écrit

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$  et des  $A_i$  mesurables et deux à deux disjoints. Montrer que pour tout  $t \geq 0$ , on a

$$\mu(\{f > t\}) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \mathbf{1}_{[0, \alpha_i[}(t).$$

- (2) Soit  $\phi : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , croissante, positive et vérifiant  $\phi(0) = 0$ . Montrer que toute fonction mesurable positive  $f$  sur  $\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{\infty} \phi'(t) \mu(\{f > t\}) dt.$$

**Exercice 20.** Dans cet exercice, on donne deux applications de l'Exercice 19.

- (1) Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable. Montrer que dans chacun des deux cas suivants, la fonction  $g$  est intégrable sur  $\Omega$ .
- (i)  $\mu(\Omega) < \infty$  et il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\mu(\{|g| > t\}) = O(1/t^\alpha)$  quand  $t \rightarrow \infty$ .
  - (ii)  $g$  est bornée et il existe  $\alpha < 1$  tel que  $\mu(\{|g| > t\}) = O(1/t^\alpha)$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .
- (2) Soit  $f$  une fonction mesurable positive sur  $\Omega$ . On suppose qu'il existe deux constantes  $A < \infty$  et  $c > 0$  telles que  $\forall t > 0 : \mu(\{f \geq t\}) \leq A e^{-ct}$ . Montrer qu'on a  $\int_{\Omega} f(x)^p d\mu(x) < \infty$  pour tout  $p \geq 1$ .

**Exercice 21.** (inégalité de Salem-Zygmund)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) = 1$ , et soit  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  une fonction mesurable. On pose  $I_1(f) := \int_{\Omega} f d\mu$  et  $I_2(f) := \int_{\Omega} f^2 d\mu$ .

- (1) Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . On pose  $A := \{x \in \Omega; f(x) \geq \varepsilon I_1(f)\}$ . En écrivant  $\int_{\Omega} = \int_{\Omega \setminus A} + \int_A$ , montrer qu'on a

$$I_1(f) \leq \varepsilon I_1(f) + \int_A f d\mu.$$

- (2) On suppose qu'on a  $0 < I_2(f) < \infty$ . En utilisant (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a

$$\mu(\{f \geq \varepsilon I_1(f)\}) \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{I_1(f)^2}{I_2(f)}.$$

**Exercice 22.** (Borel-Cantelli, ter)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) = 1$ . Soit également  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}$ . On suppose qu'on a  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ , et que les  $A_n$  sont **deux à deux indépendants**, ce qui signifie que  $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i)\mu(A_j)$  si  $i \neq j$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$ .

- (1) Pour  $i \geq 1$ , on pose  $\alpha_i := \mu(A_i)$ ; et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{et} \quad P_n := 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j.$$

Montrer qu'on a  $S_n^2 \geq P_n \geq S_n^2 - S_n$ , et en déduire que

$$\frac{P_n}{S_n^2} \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- (2) Montrer que pour toute suite d'ensembles mesurables  $(B_n)$ , on a

$$\mu(\overline{\lim} B_n) \geq \overline{\lim} \mu(B_n).$$

(3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on pose

$$f_n := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad B_{n,\varepsilon} := \{x \in \Omega; f_n(x) \geq \varepsilon S_n\}.$$

(a) En utilisant l'Exercice 21, montrer que

$$\mu(B_{n,\varepsilon}) \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{S_n^2}{S_n + P_n}.$$

(b) En déduire que  $\forall \varepsilon \in ]0, 1[ : \mu(\overline{\lim} B_{n,\varepsilon}) \geq (1 - \varepsilon)^2$ .

(c) Montrer que pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a  $\overline{\lim} B_{n,\varepsilon} \subseteq \overline{\lim} A_n$ .

(4) Conclure.

**Exercice 23.** (convergence en mesure)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables positives sur  $\Omega$ . On dit que la suite  $(f_n)$  **tend vers 0 en mesure** si

$$\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{f_n \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

(1) Montrer que si  $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow 0$ , alors  $(f_n)$  tend vers 0 en mesure.

(2) Dans cette question, on suppose que la mesure  $\mu$  est *finie*. Montrer que si  $f_n(x) \rightarrow 0$  presque partout, alors  $(f_n)$  tend vers 0 en mesure. (*Utiliser le fait que  $\mu(\{f_n \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\bigcup_{k \geq n} \{f_k \geq \varepsilon\})$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*)

(3) Dans cette question, on suppose que la suite  $(f_n)$  tend vers 0 en mesure.

(a) Montrer que  $(f_n)$  possède une sous-suite  $(f_{n_k})_{k \geq 1}$  telle que

$$\mu(\{f_{n_k} \geq 1/k\}) \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

(b) Montrer qu'on a  $\sum_1^{\infty} \mu(\{f_{n_k} \geq \varepsilon\}) < \infty$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

(c) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli (*cf* Exercice 12), montrer que la suite  $(f_{n_k})$  converge presque partout vers 0.

(4) On suppose que la mesure  $\mu$  est finie. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge vers 0 en mesure si et seulement si toute sous-suite de  $(f_n)$  possède une sous-suite qui tend vers 0 presque partout.