

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. (mesure image)

Soient $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré et (Ω', \mathfrak{B}') un espace mesurable. Soit également $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ une application mesurable. Montrer qu'on définit une mesure μ_ϕ sur (Ω', \mathfrak{B}') en posant, pour tout $A \in \mathfrak{B}' : \mu_\phi(A) := \mu(\phi^{-1}(A))$. On dit que μ_ϕ est la **mesure image** de μ par l'application ϕ .

Exercice 2. Soit (Ω, \mathfrak{B}) un espace mesurable, et soient $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ des espaces métriques. Soit également $f : \Omega \rightarrow \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$. On écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$.

- (1) Montrer que si f est mesurable, alors f_1, \dots, f_d sont mesurables.
- (2) On suppose que les Ω_j sont séparables. Montrer que f est mesurable si et seulement si f_1, \dots, f_d sont mesurables. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 6 de la Feuille 2.*)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ tel que la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus D$ est continue. Montrer que f est borélienne.

Exercice 4. Montrer qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ boréliennes qui ne sont continues en aucun point.

Exercice 5. Soit Ω un ensemble, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω . On note \mathfrak{B} la tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i \in I}$.

- (1) Montrer que \mathfrak{B} est exactement égale à l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $A = \bigcup_{i \in J} A_i$, où J est un sous-ensemble de I (dépendant de A).
- (2) Montrer qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathfrak{B} -mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque ensemble A_i .

Exercice 6. Soit Ω un espace métrique, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction arbitraire. On note C_f l'ensemble des points de continuité de f .

- (1) Montrer qu'un point $x \in \Omega$ appartient à C_f si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert O de x tel que $\forall u, v \in O : |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
- (2) Montrer que C_f est un ensemble borélien. Plus précisément, montrer que C_f est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 7. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est **séparément continue** si elle est continue par rapport à chaque variable séparément ; autrement dit : pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue, et pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue.

- (1) Montrer qu'il existe des fonctions séparément continues qui ne sont pas continues.
- (2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ séparément continue. On note \mathcal{I} la famille de tous les intervalles fermés $I \subseteq \mathbb{R}$ à extrémités rationnelles. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence suivante :

$$f(x, y) > \alpha \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \exists I \in \mathcal{I} \left(x \in I \text{ et } \forall u \in I : f(u, y) \geq \alpha + \frac{1}{k} \right).$$

- (3) Montrer que toute fonction séparément continue est borélienne.

Exercice 8. Dans tout l'exercice, (Y, d) est un espace métrique.

- (1) Soit (y_n) une suite de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$. Montrer que pour tout ouvert $O \subseteq Y$, on a l'équivalence suivante :

$$y \in O \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \exists N \in \mathbb{N} \forall p \geq N : \text{dist}(y_p, Y \setminus O) \geq \frac{1}{k},$$

où, pour $x \in Y$ et $A \subseteq Y$, on note $\text{dist}(x, A)$ la distance de x à A (qui est définie par $\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, u); u \in A\}$).

- (2) Soit (Ω, \mathfrak{B}) un espace mesurable, et soit (f_n) est une suite de fonctions mesurables de Ω dans Y . On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \rightarrow Y$. Montrer que f est mesurable. (*À toutes fins utiles, on rappelle que pour tout $A \subseteq Y$, la fonction $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ est continue.*)

Exercice 9. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point, alors f' est une fonction borélienne.

Exercice 10. Soit (Ω, \mathfrak{B}) un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs dans un espace métrique (Y, d) . Soit également $b \in Y$. Montrer que l'ensemble $A := \{x \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = b\}$ est mesurable (i.e. $A \in \mathfrak{B}$).

Exercice 11. Soit (Ω, \mathfrak{B}) un espace mesurable, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs dans un espace métrique *séparable et complet* (Y, d) . On note A l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que la suite $(f_n(x))$ converge dans Y . Montrer que l'ensemble A est mesurable. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 2.*)

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs complexes. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mu(\{|f_n| > \varepsilon\})$ est convergente. Montrer que (f_n) tend vers 0 presque partout. (Utiliser le lemme de Borel-Cantelli – Exercice 17 de la Feuille 2.)

Exercice 13. (tribu engendrée par une application)

Soit Ω un ensemble, et soit $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $\mathfrak{B}_\phi := \{\phi^{-1}(A); A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$, où $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de \mathbb{R} .

- (1) Montrer que \mathfrak{B}_ϕ est une tribu. Plus précisément, montrer que \mathfrak{B}_ϕ est la plus petite tribu sur Ω rendant ϕ mesurable. On dit que \mathfrak{B}_ϕ est la **tribu engendrée par ϕ** .
- (2) Montrer que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne, alors $g \circ \phi$ est \mathfrak{B}_ϕ -mesurable
- (3) Montrer inversement que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathfrak{B}_ϕ -mesurable, alors il existe une fonction borélienne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \phi$. (On pourra commencer par le cas où f est une fonction étagée, puis traiter le cas d'une fonction positive, et enfin le cas général.)

Exercice 14. Avec les notations de l'Exercice 14, on prend $\Omega := \mathbb{R}$ et $\phi(x) := |x|$. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathfrak{B}_ϕ -mesurable si et seulement si elle est borélienne et paire.

Exercice 15. (Théorème de récurrence de Poincaré)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Soit également $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une application mesurable. On suppose que T **préserve la mesure** μ , ce qui signifie qu'on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

- (1) Soit $A \in \mathfrak{B}$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$F := \{x \in A; \forall n \geq p : T^n(x) \notin A\},$$

où $T^n := T \circ \dots \circ T$ est la n -ième itérée de T .

- (a) Justifier que F est mesurable.
 - (b) Montrer que les ensembles $(T^{kp})^{-1}(F)$, $k \geq 0$, sont deux à deux disjoints. (Pour $k < k'$, on pourra écrire $T^{k'p} = T^{(k'-k)p} \circ T^{kp}$).
 - (c) Montrer qu'on a $\mu(F) = 0$.
- (2) Soit $A \in \mathfrak{B}$ vérifiant $\mu(A) > 0$. Montrer qu'il existe un point $x \in A$ tel que $T^n(x) \in A$ pour une infinité d'entiers n .

Exercice 16. (Théorème d'Egorov)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit également (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) converge *simplement* vers une fonction f . Dans toute la suite, on fixe $\varepsilon > 0$.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n := \left\{ x \in \Omega; \forall p \geq n : |f_p(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Justifier que les A_n sont mesurables, puis montrer qu'il existe un entier n_k tel que $\mu(A_{n_k}) > 1 - 2^{-k}\varepsilon$.

(2) Montrer qu'il existe un ensemble $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ et tel que la suite (f_n) converge uniformément sur A .

Exercice 17. (Théorème de Lusin)

Soit Ω un espace métrique, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Soit également μ une mesure borélienne sur Ω telle que $\mu(\Omega) = 1$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $K_\varepsilon \subseteq \Omega$ tel que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et tel que la restriction de f à K_ε est continue.* On aura besoin d'utiliser le fait que la mesure μ est **régulière**, au sens suivant : pour tout borélien $A \subset \Omega$ et pour tout $\eta > 0$, on peut trouver un fermé F tel que $F \subseteq A$ et $\mu(F) > \mu(A) - \eta$. (Cf l'Exercice 18 de la Feuille 2.) Dans toute la suite, on fixe $\varepsilon > 0$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi_k(x) = n_k(x) 2^{-k}$, où $n_k(x)$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n 2^{-k} \leq f(x) < (n+1) 2^{-k}$. Montrer que les fonctions φ_k sont boréliennes, et que la suite (φ_k) converge uniformément vers f .

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $A_{k,n} := \{x \in \Omega; n_k(x) = n\}$.

(a) Combien vaut $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{k,n}\right)$?

(b) En utilisant la régularité de la mesure μ , montrer qu'il existe un entier $N_k \in \mathbb{N}$ et des fermés $(F_{k,n})_{-N_k \leq n \leq N_k}$ tels que $F_{k,n} \subseteq A_{k,n}$ pour tout $n \in \llbracket -N_k, N_k \rrbracket$ et

$$\mu\left(\bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

(3) Avec les notations de (2), on pose $E_k := \bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la restriction de φ_k à E_k est continue.

(4) Démontrer le résultat souhaité en considérant $K_\varepsilon := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$.