

## Feuille d'exercices n° 2

**Exercice 1.** Soit  $\Omega$  un ensemble non vide. On note  $\mathfrak{B}$  la famille de toutes les parties  $A$  de  $\Omega$  telles que  $A$  est dénombrable ou  $\Omega \setminus A$  est dénombrable. Montrer que  $\mathfrak{B}$  est une tribu de parties de  $\Omega$ .

**Exercice 2.** Soit  $\Omega$  un ensemble non vide, et soit  $\mathfrak{B}$  une tribu de parties de  $\Omega$ .

- (1) On dit qu'un ensemble  $A \subseteq \Omega$  est un **atôme** de  $\mathfrak{B}$  si  $A \in \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset\}$  et s'il n'existe pas d'ensemble  $B \in \mathfrak{B}$  tel que  $B \subseteq A$  avec  $B \neq \emptyset$  et  $B \neq A$ .
  - (a) Montrer que si  $A$  et  $A'$  sont des atômes de  $\mathfrak{B}$ , alors ou bien  $A = A'$ , ou bien  $A \cap A' = \emptyset$ .
  - (b) Montrer que si  $A$  est un atôme de  $\mathfrak{B}$  et si  $B \in \mathfrak{B}$ , alors ou bien  $A \cap B = \emptyset$ , ou bien  $A \subseteq B$ .
- (2) Pour  $x \in \Omega$ , on note  $A(x)$  l'intersection de tous les éléments de  $\mathfrak{B}$  contenant  $x$ . Montrer que si  $x \in \Omega$  et si  $A(x) \in \mathfrak{B}$ , alors  $A(x)$  est un atôme de  $\mathfrak{B}$ .
- (3) Dans cette question, on suppose que la tribu  $\mathfrak{B}$  est *dénombrable*.
  - (a) En utilisant (1) et (2), montrer que les atômes de  $\mathfrak{B}$  forment une partition de  $\Omega$ .
  - (b) On note  $(A_i)_{i \in I}$  la famille de tous les atômes de  $\mathfrak{B}$  (les  $A_i$  étant 2 à 2 distincts); et pour toute partie  $J$  de  $I$ , on pose  $B_J := \bigcup_{i \in J} A_i$ . Justifier que  $I$  est dénombrable, puis montrer qu'un ensemble  $B \subseteq \Omega$  appartient à  $\mathfrak{B}$  si et seulement si il est de la forme  $B_J$  pour un certain  $J \subseteq I$ . (*On pourra considérer  $J = \{i \in I; A_i \cap B \neq \emptyset\}$ .*)
  - (c) Montrer que l'application  $J \mapsto B_J$  est injective. En déduire que l'ensemble  $I$  est nécessairement fini, et conclure que la tribu  $\mathfrak{B}$  est finie.

**Exercice 3.** Soit  $(\mu_i)_{i \in I}$  une famille de mesures sur un espace mesurable  $(\Omega, \mathfrak{B})$ . Montrer que la formule  $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A)$  définit une mesure sur  $(\Omega, \mathfrak{B})$ .

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un ensemble non dénombrable, et soit  $\mathfrak{B}$  la tribu définie dans l'Exercice 1. Montrer qu'on définit une mesure sur  $(\Omega, \mathfrak{B})$  en posant, pour  $A \in \mathfrak{B}$  :

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si } \Omega \setminus A \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

**Exercice 5.** (principe d'inclusion-exclusion)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  est un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) < \infty$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq k \leq n$ , on note  $\mathcal{P}_k(n)$  l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, n\}$  à  $k$  éléments. Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}$  et si  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  est une partie de  $\{1, \dots, n\}$ , on pose  $A_J := A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}$ , on a

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left( \sum_{J \in \mathcal{P}_k(n)} \mu(A_J) \right).$$

**Exercice 6.** Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ , avec  $m \geq n$ . On note  $S_m^n$  le nombre de *surjections* de  $\{1, \dots, m\}$  sur  $\{1, \dots, n\}$ .

- (1) On note  $\Omega$  l'ensemble de toutes les applications  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , et  $\mu_c$  la mesure de comptage sur  $\Omega$ . Combien vaut  $\mu_c(\Omega)$ ?
- (2) Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $A_j := \{f \in \Omega; f \text{ ne prend pas la valeur } j\}$ . Pour  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ , calculer  $\mu_c(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})$ .
- (3) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 5), établir la formule

$$S_m^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

**Exercice 7.** Soit  $N$  un entier au moins égal à 2. On note  $\varphi(N)$  le nombre d'entiers  $m \in \{1, \dots, N\}$  tels que  $\text{pgcd}(m, N) = 1$ . On note également  $p_1 < \dots < p_n$  les facteurs premiers de  $N$ . En appliquant convenablement le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 5), établir la formule

$$\varphi(N) = N \prod_{j=1}^n \left( 1 - \frac{1}{p_j} \right).$$

**Exercice 8.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) < \infty$ . On suppose que la tribu  $\mathfrak{B}$  contient tous les singletons.

- (1) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\{x \in \Omega; \mu(\{x\}) \geq \varepsilon\}$  est fini.
- (2) En déduire que l'ensemble  $\Lambda = \{x; \mu(\{x\}) \neq 0\}$  est dénombrable.

**Exercice 9.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B})$  un espace mesurable, la tribu  $\mathfrak{B}$  contenant tous les singletons. On dit qu'une mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathfrak{B})$  est une mesure **discrète** si  $\mu$  est de la forme  $\sum_{p \in \Lambda} a_p \delta_p$ , où  $\Lambda$  est un sous-ensemble dénombrable de  $\Omega$  et les  $a_p$  sont des réels positifs. On dit qu'une mesure  $\mu$  est **continue** si on a  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ . En utilisant l'Exercice 8, montrer que toute mesure finie  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathfrak{B})$  peut se décomposer sous la forme  $\mu = \mu_d + \mu_c$ , où  $\mu_d$  est une mesure discrète et  $\mu_c$  est une mesure continue.

**Exercice 10.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  finie. Soit également  $(A_n)$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}$ . Établir les inégalités

$$\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n) \leq \overline{\lim} \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim} A_n).$$

(On rappelle que  $\overline{\lim} A_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} A_n$  et  $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} A_n$ .)

**Exercice 11.** (lemme de Borel-Cantelli)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré. Montrer que si  $(A_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}$  vérifiant  $\sum_0^\infty \mu(A_n) < \infty$ , alors  $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$ .

**Exercice 12.** Montrer que la tribu  $\mathfrak{B}$  de l'Exercice 1 est engendrée par les singletons.

**Exercice 13.** Soit  $\Omega$  un ensemble non vide, et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition dénombrable de  $\Omega$  (*i.e.* l'ensemble  $I$  est dénombrable et les  $A_i$  forment une partition de  $\Omega$ ). Montrer que la tribu engendrée par les  $A_i$  est l'ensemble de toutes les parties  $B$  de  $\Omega$  de la forme

$$B = \bigcup_{i \in J} A_i, \quad \text{où } J \subseteq I.$$

**Exercice 14.** Montrer que la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  est engendrée par les intervalles compacts à extrémités rationnelles.

**Exercice 15.** Montrer que si  $(\Omega, d)$  est un espace métrique séparable, alors la tribu borélienne de  $\Omega$  est engendrée par les boules ouvertes.

**Exercice 16.** Montrer que si  $\Omega_1, \dots, \Omega_d$  sont des espaces métriques séparables, alors la tribu borélienne de  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$  est engendrée par les produits d'ouverts, *i.e.* les ensembles  $P$  de la forme  $P = O_1 \times \dots \times O_d$ , où  $O_i$  est un ouvert de  $\Omega_i$  pour  $i = 1, \dots, d$ .

**Exercice 17.** Soit  $\Omega = [0, 1[$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  on note  $\mathfrak{D}_n$  la famille de toutes les parties  $A$  de  $\Omega$  qui sont réunions d'intervalles de la forme  $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ , où  $k \in \{0; 1; \dots; 2^n - 1\}$ .

- (1) Montrer que chaque  $\mathfrak{D}_n$  est une tribu, et que la suite  $(\mathfrak{D}_n)$  est croissante.
- (2) La famille  $\mathfrak{D} = \bigcup_n \mathfrak{D}_n$  est-elle une tribu?
- (3) Montrer que la tribu engendrée par  $\mathfrak{D}$  est la tribu borélienne de  $\Omega$ .

**Exercice 18.** (régularité des mesures)

Soit  $\mu$  une mesure borélienne *finie* sur un espace métrique  $(\Omega, d)$ . On dira qu'un borélien  $A \subset \Omega$  est **régulier** pour  $\mu$  s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i)  $\mu(A) = \sup\{\mu(F); F \subset A, F \text{ fermé}\};$
- (ii)  $\mu(A) = \inf\{\mu(O); O \supset A, O \text{ ouvert}\}.$

- (1) Montrer que tout ouvert de  $\Omega$  est régulier pour  $\mu$ . (*On rappelle que tout ouvert de  $\Omega$  est réunion dénombrable de fermés.*)
- (2) Soit  $(A_n)$  une suite de boréliens réguliers de  $\Omega$ , et soit  $A := \bigcup_n A_n$ .
  - (a) Montrer que  $A$  vérifie (i).
  - (b) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver un ouvert  $O_n$  tel que  $O_n \supset A_n$  et  $\mu(O_n \setminus A_n) < 2^{-n}\varepsilon$ .
  - (c) En déduire que  $A$  vérifie (ii).
- (3) Montrer que la famille des boréliens réguliers pour  $\mu$  est une tribu.
- (4) Montrer que tout borélien de  $\Omega$  est régulier pour  $\mu$ .
- (5) Que peut-on dire de deux mesures boréliennes finies sur  $\Omega$  qui prennent les mêmes valeurs sur les ouverts?

**Exercice 19.** Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures boréliennes sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\mu_1(I) = \mu_2(I)$  pour tout intervalle compact  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Montrer qu'on a  $\mu_1(J) = \mu_2(J)$  pour tout intervalle ouvert  $J$ , et en déduire que  $\mu_1(O) = \mu_2(O)$  pour tout ouvert  $O \subseteq \mathbb{R}$ . (*Utiliser une description "bien connue" des ouverts de  $\mathbb{R}$ .*)

**Exercice 20.** En utilisant les résultats des Exercices 18 et 19, *montrer* que si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures boréliennes finies sur  $\mathbb{R}$  telles que  $\mu_1(I) = \mu_2(I)$  pour tout intervalle compact  $I \subseteq \mathbb{R}$ , alors  $\mu_1 = \mu_2$ .

**Exercice 21.** (théorème des classes monotones)

Soit  $\Omega$  un ensemble. On dit qu'une famille  $\mathcal{M}$  de parties de  $\Omega$  est une **classe monotone** si elle vérifie les propriétés suivantes.

- (i)  $\Omega \in \mathcal{M}$ ;
- (ii) si  $A, B \in \mathcal{M}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \setminus A \in \mathcal{M}$ ;
- (iii) si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{M}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .

- (1) Définir la classe monotone **engendrée** par une famille  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ .
- (2) Soit  $\mathcal{C}$  une famille de parties de  $\Omega$  stable par intersections finies. On note  $\mathcal{M}$  la classe monotone engendrée par  $\mathcal{C}$ .
  - (a) Pour  $A \in \mathcal{C}$ , on pose

$$\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{P}(\Omega); A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

Montrer que  $\mathcal{M}_A$  est une classe monotone. En déduire que pour tout  $A \in \mathcal{C}$  et pour tout  $B \in \mathcal{M}$ , on a  $A \cap B \in \mathcal{M}$ .

- (b) Montrer que  $\mathcal{M}$  est stable par intersections finies.
- (c) Montrer que  $\mathcal{M}$  est une tribu.
- (3) Démontrer le résultat suivant : *si  $\mathcal{C}$  est une famille de parties de  $\Omega$  stable par intersections finies et si  $\mathcal{M}$  est une classe monotone contenant  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{M}$  contient la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$ .*

**Exercice 22.** En utilisant le théorème des classes monotones (Exercice 21), montrer que si deux mesures boréliennes finies  $\mu$  et  $\nu$  sur  $\mathbb{R}$  prennent les mêmes valeurs sur les intervalles bornés, alors  $\mu = \nu$ .

**Exercice 23.** Montrer que  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable en utilisant la mesure de Lebesgue.

**Exercice 24.** Montrer que si  $A \subseteq \mathbb{R}$  est tel que  $\mathbb{R} \setminus A$  est  $\lambda_1$ -négligeable, alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 25.** En utilisant l'Exercice 24, montrer que si deux fonctions continues  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont égales  $\lambda_1$ -presque partout, alors  $f = g$ .

**Exercice 26.** (ensemble triadique de Cantor)

On définit une suite de fermés  $K_n \subset [0, 1]$  de la manière suivante :  $K_0 = [0, 1]$ ,  $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ ,  $K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ , et "ainsi de suite". Enfin, on pose  $K := \bigcap_{n \geq 0} K_n$ .

- (1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer la mesure de Lebesgue de  $K_n$ .
- (2) Quelle est la mesure de  $K$ ?
- (3) Dans cette question, on veut montrer que  $K$  n'est pas dénombrable.
  - (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute suite  $s = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ , on note  $I(s)$  l'intervalle  $[a(s), b(s)]$ , où

$$a(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon_i}{3^{i+1}} \quad \text{et} \quad b(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon_i}{3^{i+1}} + \frac{1}{3^n}.$$

Montrer que  $I(s) \subset K_n$  pour toute  $s \in \{0, 1\}^n$ , et que les intervalles  $I(s)$  sont deux à deux disjoints.

- (b) Montrer que pour toute suite  $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , l'intersection

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I((\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n))$$

est un singleton  $\{x_\varepsilon\}$ . Montrer ensuite que  $x_\varepsilon \in K$ . On pourra même montrer que réciproquement si  $x \in K$  alors il existe  $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  tel que  $x = x_\varepsilon$ .

- (c) Montrer que  $x_\varepsilon \neq x_{\varepsilon'}$  si  $\varepsilon \neq \varepsilon'$ , et conclure.

**Exercice 27.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de mesure  $\mu$  définie sur toutes les parties de  $\mathbb{R}$ , invariante par translations et telle que  $0 < \mu(I) < \infty$  pour tout intervalle borné non trivial  $I$ .

- (1) Montrer qu'on définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $[0, 1]$  en décrétant que  $x\mathcal{R}y$  si et seulement si  $x - y \in \mathbb{Q}$ .
- (2) On note  $(C_i)_{i \in I}$  la famille de toutes les classes d'équivalences pour la relation  $\mathcal{R}$ . Pour chaque  $i \in I$ , on choisit un point  $x_i \in C_i$ , et on pose  $V := \{x_i; i \in I\}$ . Ainsi,  $V$  est une partie de  $[0, 1]$  qui rencontre chaque  $\mathcal{R}$ -classe d'équivalence en exactement 1 point.
  - (a) Soit  $\{r_n; n \in \mathbb{N}\}$  une énumération injective de l'ensemble des rationnels de  $[-1, 1]$ . Montrer qu'on a  $[0, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V + r_n) \subset [-1, 2]$ .
  - (b) Montrer que les ensembles  $V + r_n$  sont deux-à-deux disjoints.
- (3) Démontrer par l'absurde le résultat souhaité.

**Exercice 28.** Soit  $r > 0$ . Pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ , on pose  $r \cdot A := \{rx; x \in A\}$ .

- (1) Montrer qu'on définit une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^d$  en posant  $\mu(A) = \lambda_d(r \cdot A)$  pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ .
- (2) Calculer  $\mu(P)$  pour tout pavé  $P$ , et en déduire que

$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) : \lambda_d(r \cdot A) = r^d \lambda_d(A).$$

**Exercice 29.** Soient  $r_1, \dots, r_d > 0$  et soit  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  l'application définie par  $\Phi(x_1, \dots, x_d) = (r_1 x_1, \dots, r_d x_d)$ . En raisonnant comme dans l'exercice 28, déterminer  $\lambda_d(\Phi(A))$  en fonction de  $\lambda_d(A)$  et des  $r_j$ , pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ .

**Exercice 30.** Montrer que la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  est invariante par symétries centrales.

**Exercice 31.** (aire d'un rectangle quelconque)

Soit  $R \subset \mathbb{R}^2$  un rectangle *quelconque*, i.e. à côtés non nécessairement parallèles aux axes de coordonnées. On note  $a$  et  $b$  les longueurs des côtés de  $R$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $\lambda_2(R)$  est (heureusement) égale à  $ab$ .

- (1) Démontrer le résultat en une ligne en admettant que la mesure de Lebesgue est invariante par rotations.
- (2) Dans cette question, on admet uniquement les propriétés suivantes :  $\lambda_2$  est invariante par symétries centrales, et la mesure d'un segment quelconque est égale à 0.
  - (a) Montrer que la mesure d'un triangle rectangle dont les "côtés de l'angle droit" sont parallèles aux axes de coordonnées, est bien égale à ce qu'on imagine.
  - (b) Compléter intelligemment le rectangle  $R$  en un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées.
  - (c) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 32.** (aire d'un triangle)

Soit  $\Delta = ABC$  un triangle de  $\mathbb{R}^2$ . On note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ . En admettant le résultat de l'Exercice 31, *montrer* qu'on a  $\lambda_2(\Delta) = \frac{1}{2}BC \times AH$ .

**Exercice 33.** (aire d'un disque)

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un disque de centre 0 et de rayon  $R$ . Le but de l'exercice est de montrer que  $\lambda_2(D)$  est bien égal à ce qu'on attend.

- (1) On fixe un point  $A \in \partial D$ , et pour tout entier  $N \geq 2$ , on note  $\mathcal{P}_N$  le polygône régulier à  $2^N$  côtés inscrit dans  $D$  dont  $A$  est l'un des sommets. Calculer  $\lambda_2(\mathcal{P}_N)$  en découpant  $\mathcal{P}_N$  en triangles.
- (2) Montrer que la suite  $(\mathcal{P}_N)_{N \geq 2}$  est croissante.
- (3) Conclure.

**Exercice 34.** Soient  $a, b > 0$ . On note  $\mathcal{E}$  l'intérieur de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . En utilisant les Exercices 33 et 29, déterminer l'aire de  $\mathcal{E}$ .

**Exercice 35.** (mesures invariantes par translations)

Soit  $\mu$  une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\mu$  est *invariante par translations* et qu'on a  $\mu(B) < \infty$  pour tout borélien borné  $B \subset \mathbb{R}^d$ . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante  $c$  telle que  $\mu = c \lambda_d$ .

- (1) Soit  $P \subset \mathbb{R}^d$  un "pavé semi-ouvert rationnel"; autrement dit un pavé de la forme  $[a_1, b_1[ \times \cdots \times [a_d, b_d[$ , où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont rationnels.
  - (a) Montrer qu'on peut trouver  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $k_1, l_1, \dots, k_d, l_d \in \mathbb{Z}$  tels que
 
$$P = \left[ \frac{k_1}{N}, \frac{l_1}{N} \right[ \times \cdots \times \left[ \frac{k_d}{N}, \frac{l_d}{N} \right[.$$
  - (b) On pose  $m := (l_1 - k_1) \cdots (l_d - k_d)$ . Montrer que  $P$  est réunion de  $m$  translatés du pavé  $Q_N = [0, \frac{1}{N}[ \times \cdots \times [0, \frac{1}{N}[$  deux à deux disjoints.
- (2) Soit  $Q = [0, 1[ \times \cdots \times [0, 1[$ . Montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , le pavé  $Q$  est réunion de  $N^d$  translatés du pavé  $Q_N = [0, \frac{1}{N}[ \times \cdots \times [0, \frac{1}{N}[$  deux à deux disjoints.
- (3) On pose  $c := \mu(Q)$ . Dédurre de (1) et (2) que pour tout pavé semi-ouvert rationnel  $P$ , on a  $\mu(P) = c \lambda_d(P)$ .
- (4) Conclure.

**Exercice 36.** Le but de l'exercice est de montrer que la mesure de Lebesgue  $\lambda_d$  est *invariante par isométries*; autrement dit, que si  $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une isométrie linéaire, alors

$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) : \lambda_d(I(A)) = \lambda_d(A).$$

- (1) On note  $B_2$  la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^n$ . Comparer  $B_2$  et  $I(B_2)$  lorsque  $I$  est une isométrie.
- (2) Soit  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application linéaire inversible. Montrer qu'on définit une mesure invariante par translations sur  $\mathbb{R}^d$  en posant  $\mu(A) = \lambda_d(L(A))$  pour tout borélien  $A$ .
- (3) Conclure en utilisant l'exercice 35.

**Exercice 37.** En utilisant les Exercices 29 et 36 et la *décomposition polaire*, montrer que si  $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une application linéaire inversible, alors on a pour tout borélien  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  :

$$\lambda_d(L(A)) = |\det(L)| \lambda_d(A).$$