Examen du 17 Juin 2019

Durée : 3h

Cet examen est constitué uniquement de "questions de cours"

(1) Soit (f_n) une suite de fonctions (à valeurs complexes) définies sur un intervalle fermé $[a,b]$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{C}$, et que la convergence est uniforme sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,b]$.

(2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(t):=t^{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$, mais que la convergence n'est pas uniforme.

(3) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle compact, et soit $\alpha:I\to\mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $|\alpha(t)|<1$ pour tout $t\in I$. Montrer que la série $\sum\alpha(t)^n$ converge normalement sur I.

(4) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $[0,\infty[$. On suppose qu'on a $\lim_{x\to\infty}f_n(x)=8$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f:[0,\infty[\,\to\mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers 8 quand $x\to\infty$.

(5) Soit $\alpha>2$. Montrer que $f(t):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\,t)}{1+n^\alpha t}$ est bien défini pour tout $t>0$, et que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(6) Soit I un ensemble non vide. On note $\ell^\infty(I)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions bornées $f:I\to\mathbb{C}$. Montrer que $\ell^\infty(I)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(7) Soit E un espace vectoriel normé complet, et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On suppose que la série $\sum\|x_k\|$ est convergente. Montrer que la série $\sum x_k$ converge dans E.

(8) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\Sigma_1:=\sum_{n\geq1}(3+4i)^{2n}n^{n^{5/6}}z^n\qquad\text{et}\qquad\Sigma_2:=\sum_{n\geq1}\frac{n^{3n}}{(3n)!}\,z^n.$$

(9) Montrer que $f(x) := \frac{1}{7-4x}$ est développable en série entière sur $]-7/4, 7/4[$ et déterminer son développement. En déduire le développement en série entière de $g(x) := \frac{1}{(7-4x)^3}$.

(10) Soit $\varphi : [0,6] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) := \int_0^6 e^{tx}\varphi(t)\, dt$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(11) Montrer que la fonction f définie par $f(x) := \int_0^x \log(1+t^4)\, dt$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et déterminer son développement.

(12) Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle $(1+x^2)y''(x)-2y(x) = 0$ possède une unique solution f développable en série entière sur $]-1, 1[$ et vérifiant $f(0) = a_0$ et $f'(0) = a_1$.

(13) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$.

(14) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, et en déduire la valeur de $S := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(15) Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}$; et en déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\pi\coth(\pi) - 1\right).$$