Examen du 10 Mai 2019

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $[0,\infty[$. On suppose qu'on a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers 6 quand $x \to \infty$.

(2) Soit $\alpha > 3/2$. Montrer que $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}\,t)}{1+n^\alpha t}$ est bien défini pour tout $t > 0$, et que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(3) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

(4) Soit E un espace vectoriel normé complet, et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On suppose qu'on a $\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (x_k) converge dans E.

(5) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\Sigma_1 := \sum_{n\geqslant 1} (1+i)^{3n} n^{n^{5/8}} z^n \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 := \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{2n} 2^{3n} \sin(\frac{1}{n})}{(n!)^2}\, z^n.$$

(6) Montrer que $f(x) := \frac{1}{5+3x}$ est développable en série entière sur $]-5/3, 5/3[$ et déterminer son développement. En déduire le développement en série entière de $g(x) := \frac{1}{(5+3x)^3}$.

(7) Soit a vérifiant $0 < a < \pi$. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = 1$ sur $]-a, a[$ et $f(t) = 0$ sur $[-\pi, -a] \cup [a, \pi]$; et en déduire les valeurs des sommes

$$S_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2}.$$

(8) Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n}{1-in}$; et en déduire la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\big(\pi \coth(\pi) - 1\big).$$

Exercice 1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $[0,1]$. On suppose que toutes les fonctions f_n sont C-lipschitziennes pour une certaine constante C (indépendante de n), et que la suite (f_n) converge simplement vers 0. Le but de l'exercice est de montrer que la convergence est en fait uniforme.

(1) Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un entier $N = N_{\varepsilon,K}$ tel que $\forall n \geqslant N\ \forall k \in [\![0, K]\!]\ :\ \left|f_n\left(\frac{k}{K}\right)\right| \leqslant \varepsilon$.

(2) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on peut trouver un entier $k_x \in [\![0, K]\!]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \left|f_n(x) - f_n\left(\frac{k_x}{K}\right)\right| \leqslant \frac{C}{K}\cdot$

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Le but de l'exercice est d'établir la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}\cdot$$

(1) Pour $k, p \in \mathbb{N}$, on pose $I_{k,p} := \int_0^1 x^k \log(x)^p dx$. Justifier l'existence de $I_{k,p}$, trouver une relation entre $I_{k,p}$ et $I_{k,p-1}$ si $p \geqslant 1$, puis calculer $I_{k,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(x) := -x\log(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. Montrer que la fonction f est bornée sur $[0,1]$. Que peut-on en déduire pour la série $\sum \frac{f(x)^k}{k!}$?

(3) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de calculer la somme

$$S := \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}\cdot$$

(1) Justifier que S est bien définie.

(2) Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) := \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

   (a) Justifier la définition, puis montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

   (b) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(3) Calculer S.