**L2** SSF

# Problème de vacances

Dans ce problème, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ définie par $u_3 = u_4 = u_5 := 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{2n}\, u_n.$$

Le but du problème est de montrer que

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} \to \frac{2e^{-3/4}}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(1) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n$ et que la suite $(u_n)$ est croissante.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 3$, on pose $v_n := n^\alpha u_n$ et $w_n := \log(v_n)$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 5$, on a

$$0 \leq w_{n+1} - w_n \leq \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 + \frac{1}{2(n-2)}\right)\right].$$

(b) En déduire que pour une valeur de $\alpha$ à préciser, on a

$$w_{n+1} - w_n = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(3) Déduire de (2b) que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

(4) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{u_n}{n}\, x^n$.

(5) Pour $x \in\, ]-1, 1[$, on pose

$$f(x) := \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n}\, x^n.$$

(a) Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis montrer que pour tout $x \in\, ]-1, 1[$ on a

$$x^2(f(x) + 2) = 2(1 - x)f'(x).$$

(b) Déterminer les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{1-x}$, et en déduire que

$$\forall x \in\, ]-1, 1[ \ : \ f(x) + 2 = 2(1 - x)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2 + 2x}{4}\right).$$

(6) Soit $\Sigma_1 = \sum a_n x^n$ et $\Sigma_2 = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence égaux à 1, avec des coefficients $a_n, b_n \geq 0$. On fait les hypothèses suivantes : (i) $b_n > 0$ à partir d'un certain rang; (ii) la série $\sum b_n$ diverge; (iii) $a_n/b_n$ admet une limite $C$ quand $n \to \infty$. Pour $x \in ]-1, 1[$, on pose

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad G(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Montrer que $F(x)/G(x) \to C$ quand $x \to 1^-$.

(7) On note $b_n$, $n \geq 0$ les coefficients du développement en série entière de $G(x) := (1-x)^{-1/2}$ sur l'intervalle $]-1, 1[$. Montrer que $b_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ pour tout $n \geq 0$, puis déterminer un équivalent simple de $b_n$ quand $n \to \infty$.

(8) Déduire de (5), (6) et (7) qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{2e^{-3/4}}{\sqrt{\pi}}.$$