Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Dans cet exercice, μ est une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $T > 0$, on pose

$$I_T(x) := \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it}\, dt.$$

(a) Justifier que $I_T(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que

$$I_T(x) = 2 \int_{T(x-b)}^{T(x-a)} \frac{\sin v}{v}\, dv.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{T\to\infty} I_T(x) = \pi \left(\mathbf{1}_{\{a\}}(x) + \mathbf{1}_{\{b\}}(x)\right) + 2\pi\, \mathbf{1}_{]a,b[}(x).$$

(c) Montrer également qu'il existe une constante C telle que $|I_T(x)| \leqslant C$ pour tout $T > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Déduire de (1) la "formule d'inversion" suivante : pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}\, \widehat{\mu}(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})\right) + \mu\big(\,]a,b[\,\big).$$

Exercice 2. Soit ν une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\nu(\{a\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-iat}\, \widehat{\nu}(-t)\, dt.$$

Exercice 3. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$.

(1) Soient X et Y deux va indépendantes et de loi μ.

(a) Vérifier que $\varphi_{X-Y}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire, en utilisant l'Exercice 2, qu'on a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\widehat{\mu}(t)|^2\, dt.$$

(b) Montrer que par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})\, d\mu(x).$$

(2) Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\widehat{\mu}(t)|^2|\, dt = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\})^2.$$

(À toutes fins utiles, on rappelle que l'ensemble $D = \big\{x \in \mathbb{R};\ \mu(\{x\}) \neq 0\big\}$ est dénombrable.)

Exercice 4. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|\widehat{\mu}(v) - \widehat{\mu}(u)|^2 \leqslant 2\big(1 - \operatorname{Re}\widehat{\mu}(v-u)\big).$$

Exercice 5. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\widehat{\mu}(s) = 1$ pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

(1) En utilisant l'Exercice 4, montrer que pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\widehat{\mu}(2^k s) = \widehat{\mu}(s) = 1$.

(2) Montrer que $\mu = \delta_0$.

Exercice 6. Soit X une va réelle, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

Exercice 7. Montrer que si X est une va réelle, alors φ_X est une **fonction de type positif**, ce qui signifie que pour tous $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ et pour tous $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{k,l=1}^{N} a_k \overline{a_l}\, \varphi_X(t_k - t_l) \geqslant 0.$$

Exercice 8. Soit X une va réelle.

(1) On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $\varphi_X(T) = 1$. Montrer que X est presque sûrement à valeurs dans $\frac{2\pi}{T}\,\mathbb{Z}$, et que φ_X est T-périodique.

(2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

 (i) il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| = 1$;

 (ii) il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que X est presque sûrement à valeurs dans $\alpha + \beta\mathbb{Z}$.

Exercice 9. Soit X une va réelle uniformément distribuée sur un intervalle $[a, b]$. Calculer la fonction caractéristique de X. Détailler le cas où $a = 0$, et le cas où $a = -b$.

Exercice 10. Étant donné $a > 0$, on rappelle qu'une va réelle suit la **loi de Cauchy de paramètre** a si

$$\mathbb{P}_X = \frac{a}{\pi} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

(1) Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = e^{-a|t|}$, et *en déduire* que si X est une va suivant la loi de Cauchy de paramètre a, alors sa fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi_X(t) = e^{-a|t|}.$$

(2) Déduire de (1) que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres a et b, alors $X + Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a + b$.

(3) Montrer que si $X_1, \dots, X_n$ sont des va indépendantes suivant la loi de Cauchy de paramètre a et si on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors $Z_n = \frac{S_n}{n}$ suit elle aussi la loi de Cauchy de paramètre a.

Exercice 11. On rappelle qu'une va réelle X suit une **loi gamma de paramètres** (α, λ), où $\alpha, \lambda > 0$, si

$$\mathbb{P}_X = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

(1) Soit X une va suivant une loi gamma de paramètres (α, λ).

   (a) Montrer que $\varphi_X(z)$ a un sens pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathrm{Im}(z) > -\lambda$, et que φ_X est holomorphe sur le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > -\lambda\}$.

   (b) Calculer $\varphi_X(iy)$ pour $y > -\lambda$.

   (c) En déduire $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) Montrer *en utilisant* (1) que si X et X' sont deux va indépendantes suivant des lois gamma de paramètres (α, λ) et (α', λ), alors $X + X'$ suit une loi gamma de paramètres $(\alpha + \alpha', \lambda)$.

Exercice 12. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que les va $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 13. Soit $G_1, \dots, G_N$ des va réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, chaque G_k suivant une loi normale $\mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$. On note $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par $G_1, \dots, G_N$.

(1) Montrer que si $G \in \mathcal{G}$, alors G suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m = \mathbb{E}(G)$ et $\sigma^2 = \sigma^2(G)$.

(2) Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ vérifiant $\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(Y)$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si elles sont orthogonales dans L^2.

Exercice 14. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $D = X_1X_4 - X_2X_3$. Calculer la fonction caractéristique de D, et en déduire que D suit la loi $\rho(x)dx$, où $\rho(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

Exercice 15. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, 9]\!]$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{10^k}\cdot$$

(1) Justifier la définition de X.

(2) Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{10^k}\cdot$ Calculer $\varphi_{S_n}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(3) En déduire $\varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(4) Conclure que X est uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Exercice 16. Soit X une va réelle. On suppose que la fonction caractéristique de X est 2 fois dérivable en 0. Le but de l'exercice est de montrer que X admet un moment d'ordre 2, autrement dit que $X \in L^2$.

(1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a

$$\frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{2t^2} = \mathbb{E}\Big(\frac{\cos(tX) - 1}{t^2}\Big);$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\Big) \quad \text{admet une limite } l \text{ quand } t \to 0.$$

(2) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. En appliquant le Lemme de Fatou aux va Y_n définies par

$$Y_n = \frac{1 - \cos(t_nX)}{t_n^2},$$

montrer qu'on a $\mathbb{E}\big(\frac{1}{2}X^2\big) \leqslant l$; et conclure.

Exercice 17. Soient X et Y deux va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ et appartenant à L^∞. On suppose qu'on a

$$\mathbb{E}(X^k Y^l) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(X^l) \qquad \text{pour tous } k, l \in \mathbb{N}.$$

En utilisant les fonctions caractéristiques et le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 18. Soit X une va réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(1) Montrer que X admet des moments de tous ordres.
(2) Montrer, en utilisant uniquement la définition de φ_X, qu'on peut développer $\varphi_X(t)$ en série entière sur $\mathbb{R}$.
(3) En supposant connu que $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(4) Calculer *directement* $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide d'intégrations par parties, et *en déduire* que $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit X une va réelle, et soit $a > 0$. On suppose qu'on a $\mathbb{E}(e^{a|X|}) < \infty$. Montrer que φ_X est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Exercice 20. Soient X et Y deux va réelles. On suppose que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{E}(e^{a|X|}) < \infty$ et $\mathbb{E}(e^{a|Y|}) < \infty$. Montrer que si $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. (Utiliser l'Exercice 19.)

Exercice 21. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Z = XY$.

(1) Montrer que Z admet des moments de tous ordres, et calculer ces moments à l'aide de l'Exercice 18.
(2) En déduire que φ_Z est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et qu'on a

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{pour tout } t \in]-1, 1[.$$

Exercice 22. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. On pose $Z = XY$.

(1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty)\, d\mathbb{P}_Y(y).$$

(2) On suppose que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ \varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Exercice 23. Soit X une va réelle, et soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_k. On note G_N la fonction génératrice de N :

$$G_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k)x^k \qquad \text{pour } x \in [-1,1].$$

Enfin, on note S_N la va définie par

$$S_N(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega),$$

avec la convention $\sum_{k=1}^{0} = 0$ (autrement dit : $S_N(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$). Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{S_N}(t) = G_N(\varphi_X(t)).$$

Exercice 24. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de va réelles. On suppose que (X_n) converge en loi vers une va X, et que (Y_n) converge en loi vers une va Y. De plus, on suppose que X et Y sont indépendantes, et que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.

Exercice 25. Soient X et Y deux va indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = X + \frac{1}{n}$ et $Y_n = (1-X) - \frac{1}{n}$. Montrer que X_n converge en loi vers X, que Y_n converge en loi vers Y, mais que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X+Y$. Comparer avec l'Exercice 24.

Exercice 26. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Z_n une va à valeurs dans $\mathbb{N}$, uniformément distribuée sur l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. Montrer que la suite (Z_n) ne converge pas en loi.

Exercice 27. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que chaque Z_n suit une loi normale $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi si et seulement si les deux suites (m_n) et (σ_n^2) sont convergentes.

Exercice 28. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que chaque Z_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, et que $p_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que (Z_n) converge en loi si et seulement si np_n admet une limite quand $n \to \infty$, et déterminer alors la loi limite.

Exercice 29. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va réelles. On suppose que X_n est uniformément distribuée sur l'ensemble $[\![1,n]\!]$, pour tout $n \geqslant 1$.

(1) Montrer *en utilisant les fonctions caractéristiques* que $Z_n = \frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une va uniformément distribuée sur $[0,1]$.
(2) Redémontrer ce résultat en utilisant uniquement la définition de la convergence en loi.

Exercice 30. Soit X une va réelle appartenant à L^1, d'espérance $\mathbb{E}(X) = c \geqslant 0$, et soit $(X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1]$ telle que $p_n \to 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne une va N_n à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_j et suivant une loi géométrique de paramètre p_n, *i.e.* $\mathbb{P}(N_n = k) = (1-p_n)^{k-1}p_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k := X_1 + \cdots + X_k$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n(\omega) := p_n\, S_{N_n(\omega)}(\omega) = p_n\big(X_1(\omega) + \cdots + X_{N_n(\omega)}(\omega)\big).$$

(1) Justifier que les Z_n sont des va.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\mathbb{E}\big(f(Z_n)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k)\mathbb{E}(f(p_n S_k)).$$

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{Z_n}(t) = \frac{p_n \varphi_X(tp_n)}{1-(1-p_n)\varphi_X(tp_n)}.$$

(4) En utilisant le développement limité de φ_X à l'ordre 1 en 0, montrer que si $c = 0$, alors la suite (Z_n) converge en loi vers 0, et que si $c > 0$, alors (Z_n) converge en loi une va Z suivant la loi exponentielle de paramètre $1/c$.

Exercice 31. Soit X une va réelle à densité, $\mathbb{P}_X = \rho(x)dx$. On suppose de plus que ρ est une fonction *paire*, et que $X \in L^4$. Soit également $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes de lois $\mathbb{P}_{X_k} = \rho_k(x)dx$, où $\rho_k(x) := \frac{1}{a_k}\rho\big(\frac{x}{a_k}\big)$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^4 = o\left(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^2\right) \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad \sigma_n := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{\sigma_n}$ converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(1) Pour $n \geqslant 1$, exprimer la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sigma_n}$ à l'aide de φ_X, de σ_n et de $a_1, \ldots, a_n$.

(2) Montrer que φ_X est une fonction paire et à valeurs réelles, et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_X(u) \in [1/2, 3/2]$ pour tout $u \in [-\delta, \delta]$.

(3) Montrer que pour $u \in [-\delta, \delta]$, on peut écrire

$$\log\big(\varphi_X(u)\big) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \eta(u),$$

où $\sigma^2 := \sigma^2(X)$ et $\eta(u) \leqslant C\, u^4$ pour une certaine constante C indépendante de u.

(4) Pour $n \geqslant 1$, exprimer σ_n^2 en fonction de σ^2 et $a_1, \ldots, a_n$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 32. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de va réelles indépendantes, et soit $\alpha > 0$. On suppose que chaque X_k est uniformément distribuée sur l'intervalle $[-a_k, a_k]$, où $a_k = k^\alpha$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et

$$Z_n := \frac{S_n}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

En utilisant l'Exercice 31, montrer que (Z_n) converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où σ^2 est à déterminer.

Exercice 33. Soit X une va réelle appartenant à L^2, centrée et de variance σ^2, et soit $(X_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également (N_k) une suite de va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et indépendantes des X_j. On suppose que $N_k(\omega) \to \infty$ presque sûrement. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$Z_k := \frac{S_{N_k}}{\sqrt{N_k}} \quad , \qquad \text{où} \quad S_{N_k}(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_{N_k(\omega)}(\omega).$$

(1) Montrer que pour tout $A \in \mathbb{N}^*$, pour tout k et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \varphi_{Z_k}(t) - e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}} \right| \leqslant 2\mathbb{P}(N_k < A) + \sum_{n=A}^{\infty} \mathbb{P}(N_k = n) \left| \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}} \right|.$$

(2) Montrer que (Z_k) converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice 34. Soit X une va réelle appartenant à L^1, de moyenne m, et soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer *sans utiliser la loi des grands nombres* (mais à l'aide des fonctions caractéristiques si besoin est) que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{proba}} m$.

Exercice 35. Soient X et Y deux va réelles indépendantes appartenant à L^2 et de même loi, avec pour moyenne $m = 0$ et pour variance σ^2. On suppose que la va $Z := \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a la même loi que X et Y. Le but de l'exercice est de montrer que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(1) On note φ la fonction caractéristique de X et Y. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\frac{t}{\sqrt{2}})^2 = \varphi(t)$, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\varphi(t) = \varphi\Big(\frac{t}{2^n}\Big)^{4^n}.$$
(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

Exercice 36. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de même loi, appartenant à L^2, centrées et de variance σ^2. On suppose de plus que les va $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes. Le but de l'exercice est de montrer que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(1) On note φ la fonction caractéristique de X et de Y. Montrer qu'on a $\varphi(2t) = \varphi_{X+Y}(t)\varphi_{X-Y}(t)$, et en déduire l'identité
$$\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t).$$
(2) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\varphi(\frac{t}{2^n})$ et $\varphi(-\frac{t}{2^n})$; et en déduire que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(3) Pour $t \in \mathbb{R}$ pose $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)}$.

  (a) Montrer que ψ est dérivable en 0 et calculer $\psi'(0)$.

  (b) Exprimer $\psi(2t)$ en fonction de $\psi(t)$, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\psi(t) = \psi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2^n}.$$
  (c) En utilisant le développement limité de ψ en 0, montrer que $\psi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(4) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n}.$$
(5) Conclure en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

Exercice 37. Soit X une va réelle appartenant à L^2, centrée et de variance $\sigma^2 > 0$, et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^1. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^2.

(1) Justifier que $\|X\|_1 > 0$, puis montrer que a_k tend vers 0 quand $k \to \infty$.

(2) Soit S la limite (en norme L^1) de la suite $S_n := \sum_{k=0}^n a_k X_k$. Justifier qu'il existe $t > 0$ tel que $\varphi_S(t) \neq 0$.

(3) Exprimer $\varphi_{S_n}(t)$ à l'aide de φ_X, puis montrer que la série $\sum \log|\varphi_X(a_k t)|$ est convergente.

(4) Justifier que φ_X admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, et que ce développement est de la forme

$$\varphi_X(u) = 1 - c\,u^2 + o(u^2),$$

où $c > 0$ est à déterminer explicitement.

(5) En utilisant (1), (3) et (4), montrer que la série $\sum a_k^2$ est convergente.

(6) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 38. Soit (Z_n) une suite de va réelles convergeant en loi vers une va Z. Le but de l'exercice est de montrer que $\varphi_{Z_n}(t)$ tend vers $\varphi_Z(t)$ *uniformément* sur tout intervalle compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. On rappelle le fait suivant (*cf* cours) : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A = A_\varepsilon > 0$ tel que

$$(*) \qquad \mathbb{P}_Z\big(\mathbb{R}\backslash[-A, A]\big) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{Z_n}\big(\mathbb{R}\backslash[-A, A]\big) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $(s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[a, b]$ de "pas" δ. Soit également $\varepsilon > 0$, et soit A_ε vérifiant $(*)$. Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant N - 1$ et si $t \in [s_k, s_{k+1}]$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\varphi_{Z_n}(t) - \varphi_Z(t)| \leqslant 4\varepsilon + |\varphi_{Z_n}(s_k) - \varphi_Z(s_k)| + 2A_\varepsilon\delta.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 39. Soit $\delta > 0$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \delta$, il existe une constante C_ε telle que, pour tout va réelle X, on a

$$\mathbb{P}\big(|X| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{C_\varepsilon}{\delta} \int_0^\delta |1 - \varphi_X(t)|\, dt.$$

(1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et

$$g(x) := 1 - \frac{\sin x}{x} \qquad \text{si } x \neq 0.$$

Montrer que pour toute va réelle X définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, on a

$$\int_\Omega g(\delta X)\, d\mathbb{P} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \big(1 - \operatorname{Re} \varphi_X(t)\big)\, dt.$$

(2) Justifier que pour tout $\eta > 0$, on a $\inf \{g(x);\ |x| \geqslant \eta\} > 0$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 40. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_{Z_n}(t) \to 1$ pour tout $t \in [0, \delta]$. En utilisant l'Exercice 39, montrer que (Z_n) converge en probabilité vers 0. (Par conséquent $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$, et donc $\varphi_{Z_n}(t) \to 1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.)

Exercice 41. Soit $(X_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de va réelles indépendantes. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^n X_k$, et on suppose que la suite (S_n) converge *en loi* vers une va Z. Le but de l'exercice est de montrer que (S_n) converge *en probabilité*. On rappelle (*cf* un exercice de la Feuille 4) qu'il suffit pour cela de montrer que (S_n) est *de Cauchy en probabilité*, autrement dit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\big(|S_q - S_p|\big) \to 0 \qquad \text{quand } p, q \to \infty.$$

(1) En utilisant l'Exercice 38, montrer qu'il existe $\delta > 0$ et un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N\ \forall t \in [0, \delta]\ :\ |\varphi_{S_n}(t)| \geqslant \frac{1}{2}\cdot$$

(2) Montrer que si $p < q$, alors

$$\varphi_{S_q} - \varphi_{S_p} = \varphi_{S_p}(\varphi_{S_q - S_p} - 1);$$

et en déduire que si $N \leqslant p < q$, alors

$$|1 - \varphi_{S_q - S_p}(t)| \leqslant 2|\varphi_{S_q}(t) - \varphi_{S_p}(t)| \qquad \text{pour tout } t \in [0, \delta].$$

(3) En utilisant l'Exercice 39, montrer que (S_n) est de Cauchy en probabilité.

Exercice 42. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a f(t) = f(t - a)$. Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2} \int_\mathbb{R} (f(t) - \tau_{\pi/x} f(t))\, e^{-ixt}\, dt\,.$$

(2) *En déduire* que $\widehat{f}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$.

Exercice 43. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution ; autrement dit, qu'il n'existe pas de fonction $k \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $k * f = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 44. On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est **à décroissance rapide** si $u(t) = o(1/t^k)$ quand $t \to \pm\infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. L'**espace de Schwartz**, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que f et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est "stable par Fourier" : si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 45. Montrer que la transformation de Fourier est une bijection de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui même.

Exercice 46. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par convolution.

Exercice 47. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polynôme non nul à coefficients complexes *sans racines réelles*. Montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $P(D)f = g$, où $P(D)f = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_N f^{(N)}$.

Exercice 48. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := 1 - |t|$ si $|t| \leqslant 1$, et $f(t) := 0$ si $|t| > 1$. Calculer la transformée de Fourier de f, et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\, dx.$$

Exercice 49. Montrer que si f et g sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors les fonctions $\overline{f}\, \check{g}$ et $\overline{\widehat{f}}\, g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f}\, \check{g} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}}\, g.$$

Exercice 50. En utilisant la formule d'inversion de Fourier et l'Exercice 49, montrer que si f est une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Cette formule s'appelle la **formule de Plancherel**.

Exercice 51. On admet que la formule de Plancherel est valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. En considérant $f := \mathbf{1}_{[-1,1]}$, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \pi.$$