Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soit X une va réelle uniformément distribuée sur l'ensemble $\Lambda = \{1, \dots, N\}$. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2. Soit X une va réelle uniformément distribuée sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3. Soit X une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que si λ est un *entier*, alors

$$\mathbb{E}\Big(|X - \lambda|\Big) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}\cdot$$

Exercice 4. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de même loi $\mu = \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)dx$. On pose $U = XY$ et $V = \frac{X}{Y}\cdot$ Déterminer la loi de (U, V), puis calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{V\sqrt{U}}\right)$.

Exercice 5. Soit X un va à valeurs dans un intervalle $[a, b]$. En utilisant le fait que $\sigma^2(X) = \sigma^2(X - c)$ pour toute constante c, montrer que $\sigma^2(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}\cdot$

Exercice 6. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Soit également $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Enfin, pour $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega)$ le plus petit entier n tel que $S_n(\omega) \geq a$ s'il en existe un, et on pose $T(\omega) = \infty$ si $S_n(\omega) < a$ pour tout $n \geq 1$.

(1) Montrer que T est à valeurs dans $\{a, a + 1, a + 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, et que T est une va.
(2) Montrer que $T < \infty$ ps.
(3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}(T = a + k) = \binom{a + k - 1}{a - 1} p^a(1 - p)^k.$$
(4) Quelle formule "bien connue" obtient-on en appliquant (2) et (3)?
(5) On suppose que $a \geq 2$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{a-1}{T-1}\right) = p$ et $\mathbb{E}\left(\frac{a}{T}\right) > p$.

Exercice 7. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Montrer que si S et X sont des va réelles indépendantes, alors
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \mathbb{P}(S + X < \alpha) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(S < \alpha - x)\, d\mathbb{P}_X(x).$$
En déduire que pour tout $a \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(S_n < a) = \frac{a^n}{n!}\cdot$

(2) Pour $n \geq 2$, calculer $\mathbb{P}(1 - X_n \leq S_{n-1} < 1)$.

(3) On définit une va T à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : si $\omega \in \Omega$, alors $T(\omega)$ est le plus petit entier n tel que $S_n(\omega) \geq 1$ s'il en existe un, et $T(\omega) = \infty$ si $S_n(\omega) < 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(T) = e$.

Exercice 8. Soit X une va réelle, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X (définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$). Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des X_i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, on note S_N la va définie par
$$S_N(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) = X_1 + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

(1) Exprimer S_N comme somme d'une série faisant intervenir N et les S_n.

(2) Montrer que si X et N sont dans L^1, alors $S_N \in L^1$ et
$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{E}(X).$$

Exercice 9. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(1) Justifier que la va $\frac{1}{X+1}$ est dans L^1.

(2) On note $G_X = [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de X,
$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\, s^k.$$
Montrer qu'on a
$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{X+1}\Big) = \int_0^1 G_X(s)\, ds.$$

(3) On suppose que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}\big(\frac{1}{X+1}\big)$.

Exercice 10. Dans cet exercice, X est une va réelle.

(1) Montrer qu'il existe au moins un nombre réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$. On dit qu'un tel m est une **médiane** de X. (On pourra considérer $m := \inf\{t \in \mathbb{R} \ : \ F_X(t) \geq 1/2\}$.)

(2) Montrer que si m est une médiane de X, alors :

$$\forall x > m \ : \ \mathbb{P}(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{2};$$
$$\forall x < m \ : \ \mathbb{P}(X \geq x) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \leq x) \leq \frac{1}{2}.$$

(3) Soit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$. Montrer que si $X \in L^1$ et si $a < b$, alors

$$\mathbb{E}\big(|X-b|\big) - \mathbb{E}\big(|X-a|\big) = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

(4) On suppose que $X \in L^1$. Déduire des questions précédentes que si m est une médiane de X, alors

$$\mathbb{E}\big(|X-m|\big) = \inf\Big\{\mathbb{E}\big(|X-u|\big);\ u \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Exercice 11. Soit X une va réelle, et soit ε une va indépendante de X et suivant une loi de Rademacher, *i.e.* $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$. On pose $Y = \varepsilon X$.

(1) Montrer qu'on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(2) Montrer que si la va X^2 n'est pas presque sûrement constante, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 12. Soient X et Y deux va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

(1) On suppose que X ne peut prendre que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne quelconque, alors $f(X)$ est fonction affine de X, *i.e.* il existe des constantes a et b telles que $f(X) = aX + b$.
(2) On suppose que X et Y ne peuvent prendre chacune que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que X et Y sont indépendantes *si et seulement si* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 13. Soient $X_1, \dots, X_N$ des va réelles deux à deux indépendantes et appartenant à L^2, de même moyenne m et de même variance σ^2. On pose

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2.$$

Calculer $\mathbb{E}(\overline{X})$ et $\mathbb{E}(V)$.

Exercice 14. Soit X une va réelle définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, et soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes.

(1) Montrer que si Y est une autre va réelle définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, alors la va $Z = \big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)$ est positive. On peut donc écrire
$$\mathbb{E}\Big(\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)\Big) \geq 0.$$

(2) On suppose que les va $f(X)$ et $g(X)$ sont dans L^2. En appliquant (1) à une va Y indépendante de X et de même loi que X, montrer qu'on a
$$\mathbb{E}\big(f(X)g(X)\big) \geq \mathbb{E}\big(f(X)\big)\,\mathbb{E}\big(g(X)\big).$$

Exercice 15. Soient $X_1, \dots, X_n$ des va réelles indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi de
$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$

Exercice 16. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, et soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des va à valeurs dans $\{-1, 1\}$, deux à deux indépendantes et suivant chacune une loi de Rademacher. Calculer $\mathbb{E}\left(\big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i\big)^2\right)$.

Exercice 17. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et soient $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|u_i\| \leq 1$ pour $i = 1, \dots, N$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Soient également $p_1, \dots, p_N \in [0, 1]$. On pose
$$v := \sum_{i=1}^{N} p_i u_i.$$

(1) Soient $X_1, \dots, X_N$ des va indépendantes, chaque X_i suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_i)$. Montrer qu'on a
$$\mathbb{E}\left(\Big\|v - \sum_{i=1}^{N} X_i u_i\Big\|^2\right) = \sum_{i=1}^{N} p_i(1 - p_i)\|u_i\|^2.$$

(2) Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_N \in \{0, 1\}$ tels que
$$\Big\|v - \sum_{i=1}^{N} x_i u_i\Big\| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

Exercice 18. (Borel-Cantelli amélioré)
Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite d'évènements *deux à deux indépendants*. On suppose qu'on a $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, E_i\big) = 1$. (La subtilité est qu'on ne suppose pas que les E_i sont indépendants.)

(1) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite *croissante* de va réelles positives et appartenant à L^2. On suppose que

$$\mathbb{E}(S_n) \to \infty \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma^2(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)^2} \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(a) Montrer que $T_n = \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ tend vers 1 en norme L^2.
(b) En déduire que $S_n \to \infty$ presque sûrement.

(2) Conclure en observant que $\overline{\lim}\, E_i = \{\omega \in \Omega;\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_i}(\omega) = \infty\}$.

Exercice 19. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que ϕ' est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\phi(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$. Montrer que si Z est une va réelle quelconque, alors $\phi(Z) \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(\phi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Z > t)\, \phi'(t) dt.$$

Exercice 20. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

Exercice 21. Soit X une va réelle. On suppose qu'il existe des constantes $A, c, \alpha, t_0 > 0$ telles que $\forall t > t_0 \ :\ \mathbb{P}\big(|X| > t\big) \leq Ae^{-ct^{\alpha}}$. Montrer que $X \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 22. Soit X une va réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $X \in L^p$ pour tout $p < \infty$, et calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 23. Soit $a > 0$, et soit $\phi : \mathbb{R} \to [0, a]$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $0 \leq \alpha < a$, on a

$$\mathbb{P}\big(\phi(X) \geq \alpha\big) \geq \frac{\mathbb{E}\big(\phi(X)\big) - \alpha}{a - \alpha}\cdot$$

Exercice 24. Soit X une va réelle positive appartenant à L^2, et soit $\alpha \in]0,1[$.

(1) On pose $m = \mathbb{E}(X)$. En écrivant $X = X\,\mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X) + X\,\mathbf{1}_{]-\infty, \alpha m[}(X)$, établir l'inégalité

$$(1-\alpha)\, m \leq \mathbb{E}\big(X\,\mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X)\big).$$

(2) Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}\big(X \geq \alpha\, \mathbb{E}(X)\big) \geq (1-\alpha)^2\, \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}\cdot$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Paley-Zygmund**.)

Exercice 25. Soit X une va réelle appartenant à L^2, de moyenne m, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant convenablement l'inégalité de Tchebitchev, montrer que

$$\underline{\lim} \frac{|S_n - nm|}{\sqrt{n}} < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 26. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que les X_i sont dans L^2, qu'elles sont centrées, et qu'on a $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^2(X_i) < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum X_i$ converge presque sûrement.

(1) Soient $m, N \in \mathbb{N}$, avec $N \leq m$. Pour $j \in \{N, \dots, m\}$, on pose $S_j := \sum\limits_{i=N}^{j} X_i$. Soit également $\varepsilon > 0$. Le but de cette question est d'établir l'inégalité suivante (qu'on appelle l'**inégalité maximale de Kolmogorov**) :

$$\mathbb{P}\left(\max_{N\leq j\leq m} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{m} \sigma^2(X_i) .$$

(a) Pour $i \in \{N, \dots, m\}$, on pose

$B_i := \big\{\omega \in \Omega;\ |S_k(\omega)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } k \text{ vérifiant } N \leq k < i\big\}.$

Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a l'équivalence suivante :

$$\max_{N\leq j\leq m} |S_j(\omega)| \geq \varepsilon \iff \left|\sum_{i=N}^{m} X_i(\omega)\mathbf{1}_{B_i}(\omega)\right| \geq \varepsilon.$$

(b) Montrer que si $N \leq i < i' \leq m$, alors les va $X_{i'}$ et $X_i\mathbf{1}_{B_i}\mathbf{1}_{B_{i'}}$ sont indépendantes.

(c) Déduire de (b) qu'on a

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=N}^{m} X_i\mathbf{1}_{B_i}\right)^2\right) \leq \sum_{i=N}^{m} \sigma^2(X_i).$$

(d) Démontrer l'inégalité souhaitée

(2) Déduire de (1) que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists m \geq N \ :\ \left|\sum_{i=N}^{m} X_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i) .$$

(3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer à l'aide de (2) que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists p, q \geq N \ :\ \left|\sum_{i=p}^{q} X_i(\omega)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i).$$

(4) Conclure.

Exercice 27. Soit (a_i) une suite de nombres réels telle que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$. En utilisant l'Exercice 26, montrer qu'il existe une suite de signes $(\varepsilon_i) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \varepsilon_i a_i$ est convergente.

Exercice 28. Soit X une va à valeurs dans $[-1,1]$ et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $r > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq 2e^{-r^2/2}.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}\, e^{-t} + \frac{x+1}{2}\, e^{t}$.
(2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 29. Soit X une variable aléatoire *bornée*, d'espérance nulle, et soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{n^\alpha}$ tend presque sûrement vers 0 pour tout $\alpha > 1/2$.

(1) Justifier que $e^{tX} \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(2) Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq e^{-\lambda a}\big(\mathbb{E}(e^{\lambda X})^n + \mathbb{E}(e^{-\lambda X})^n\big)\ .$$

(3) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}\big(e^{tX}\big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall t \in [-1,1]\ :\ \mathbb{E}(e^{tX}) \leq 1 + Ct^2$.
(4) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\lambda \in]0,1]$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\lambda n^\alpha \varepsilon + Cn\lambda^2}.$$

(5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 30. Dans tout l'exercice, X est une va réelles, et $X_1, \dots, X_n$ sont des va indépendantes et de même loi que X. On pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad T_n := X_1^2 + \cdots + X_n^2.$$

(1) Montrer que si S, T sont des va réelles et si $x, y, u, v \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}\big(S \geq x\,, T \leq y\big) \leq e^{-ux+vy}\, \mathbb{E}\left(e^{uS-vT}\right)$$

(2) Montrer à l'aide de (1) que

$$\forall x, y, u, v \geq 0\ :\ \mathbb{P}\big((S_n \geq x\,, T_n \leq y\big) \leq e^{-ux+vy}\, \mathbb{E}\left(e^{uX-vX^2}\right)^n.$$

(3) Dans cette question, on suppose que la va X est **symétrique**, ce qui signifie que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que

$$\forall u, v \geq 0 \ : \ \mathbb{E}\left(e^{uX - vX^2}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{ch}(uX)\, e^{-vX^2}\right) ;$$

et en déduire que

$$\forall u \geq 0 \ : \ \mathbb{E}\left(e^{uX - \frac{u^2}{2}X^2}\right) \leq 1.$$

(4) On suppose que la va X est symétrique. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x, y > 0 \ : \ \mathbb{P}\big(S_n \geq x \, , \, T_n \leq y\big) \leq e^{-\frac{x^2}{2y}}.$$

(5) On suppose que la va X est symétrique et *bornée*, et on pose $C = \|X\|_\infty$. En observant que $T_n \leq C^2 n$, déduire de (4) que

$$\forall \varepsilon > 0 \ : \ \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n\varepsilon^2/2C^2}.$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hoeffding**.

Exercice 31. Dans tout l'exercice, on fixe une suite $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de va indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, et suivant toutes la loi de Rademacher:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1).$$

On note $\mathcal{E} \subseteq L^\infty$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions ε_i. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *sur l'espace $\mathcal{E}$, toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ sont équivalentes.* (Ce résultat est remarquable car $\mathcal{E}$ est de dimension infinie.)

(0) Soit $Z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$, où $I \subseteq \mathbb{N}$ est fini. Calculer $\|Z\|_2^2$.

(1) Soit $Z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$.

(a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{\pm\lambda Z}\right)$ et montrer qu'on a $\mathbb{E}\left(e^{\pm\lambda Z}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}\sum_i a_i^2}$.

(b) Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}\big(|Z| > t\big) \leq 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i\in I} a_i^2}\right).$$

(2) Soit $Z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$, et soit $1 \leq p < \infty$. En utilisant (1) et "la formule bien connue" pour $\mathbb{E}(|Z|^p)$, montrer que si $\|Z\|_2 = 1$, alors $\|Z\|_p \leq B_p$, où B_p est une constante finie dépendant uniquement de p.

(3) Soient toujours $Z = \sum_{i\in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ et $1 \leq p < \infty$.

(a) Comparer $\|Z\|_p$ et $\|Z\|_2$ lorsque $p \geq 2$.

(b) (i) Montrer que si X est une variable aléatoire positive, alors

$$\mathbb{E}(X^2) \leq (\mathbb{E}(X^p))^{2/3} \times \left(\mathbb{E}(X^{6-2p})\right)^{1/3} .$$

(ii) On suppose que $p < 2$. En utilisant (i) et en appliquant (2) à un autre exposant que p, montrer que si $\|Z\|_2 = 1$, alors $\|Z\|_p \geq A_p$ pour une certaine constante $A_p > 0$ dépendant uniquement de p.

(4) Conclure.

Exercice 32. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit les **polynômes de Bernstein** $B_n f$, $n \geq 1$ par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de l'exercice est de montrer "de manière probabiliste" que $B_n f$ tend uniformément vers f sur $[0,1]$ quand $n \to \infty$.

(1) Soit $x \in [0,1]$ fixé. On considère une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre x. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Vérifier que $B_n f(x) - f(x) = \mathbb{E}\Big[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\Big]$.

(b) Calculer $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n})$ et $\sigma^2(\frac{S_n}{n})$, et en déduire que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

(2) Pour $\delta > 0$, on pose $\omega_f(\delta) = \sup\big\{|f(v) - f(u)|;\ |v-u| < \delta\big\}$. Déduire de (1) que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

(3) Conclure.

Exercice 33. On garde les notations de l'exercice 32. Montrer que si la fonction f est *lipschitzienne* sur $[0,1]$, alors il existe une constante C telle que

$$\forall n \geq 1 \ :\ \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 34. On garde les notations de l'exercice 32, et on suppose que la fonction f est *de classe* $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

(1) Soit $M = \sup\{|f''(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Montrer que pour $u, x \in [0,1]$, on peut écrire

$$f(u) - f(x) = f'(x)(u-x) + R(u,x), \quad \text{où} \quad |R(u,x)| \leq \frac{M}{2}(u-x)^2.$$

(2) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \geq 1\ :\ \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{n}\cdot$$

Exercice 35. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

(1) Vérifier que f est lipschitzienne.

(2) Soient $B_n f$, $n \geq 1$ les polynômes de Bernstein associés à f (*cf* l'Exercice 32). Soit également $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Big|B_n f\big(1/2\big)\Big| = \frac{1}{2n}\mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big|\Big).$$

(3) En utilisant l'Exercice 31, en déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall n \geq 1\ :\ \|B_n f - f\|_\infty \geq \frac{c}{\sqrt{n}}\cdot$$

Comparer ce résultat à celui de l'Exercice 33.