Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soient $a, b > 0$, et soient X et Y deux va indépendantes, avec X uniformément distribuée sur $]0, a[$ et Y uniformément distribuée sur $]0, b[$. Déterminer la loi de XY.

Exercice 2. Soient X et Y sont des va réelles indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$ et $\mathcal{N}(0, \beta^2)$.

(1) Déterminer la loi de $Z := (X + Y, \beta^2 X - \alpha^2 Y)$ en utilisant convenablement le théorème de transfert et la formule de changement de variables.

(2) *En déduire* que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Exercice 3. Soient X et Y deux va réelles indépendantes suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

(1) Montrer que $X' := \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $Y' := \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$ sont elles aussi indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(2) Plus généralement, soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 \neq 0$. Montrer que les va $X' = aX + bY$ et $Y' = -bX + aY$ sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 4. Soient X et Y deux va réelles. On pose $M := \max(X, Y)$ et $m := \min(X, Y)$. On suppose que la va $Z := (X, Y)$ admet une densité $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$.

(1) Déterminer la loi de $\widetilde{Z} := (m, M)$.

(2) En déduire que M et m admettent des densités, et exprimer ces densités à l'aide de la fonction ρ.

Exercice 5. Soient R et Θ deux va réelles indépendantes, à valeurs dans $[0, 1]$ et $[0, 2\pi]$ respectivement. On pose $Z := (R \cos \Theta, R \sin \Theta)$.

(1) On suppose que R est uniformément distribuée sur $[0, 1]$ et que Θ est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$. Déterminer la loi de Z.

(2) On suppose que Z est uniformément distribuée sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Déterminer les lois de R et de Θ.

Exercice 6. Soient X_1 et X_2 deux va réelles indépendantes, à densité et strictement positives. On note ρ_1 et ρ_2 les densités associées. Montrer que $Y := X_1/X_2$ est une va à densité, dont la densité ρ est donnée, pour $y > 0$, par la formule $\rho(y) = \int_0^\infty x\rho_1(xy)\rho_2(x)\,dx$.

Exercice 7. Soient X_1 et X_2 deux va réelles indépendantes. On suppose que les lois $\mathbb{P}_{X_1}$ et $\mathbb{P}_{X_2}$ sont diffuses, *i.e.* ne chargent pas les points.

(1) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 0$.
(2) En déduire que si X_1 et X_2 ont la même loi, alors $\mathbb{P}(X_1 \leqslant X_2) = \frac{1}{2}$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de donner une preuve "probabiliste" de la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(1) Soient X_1 et X_2 deux va indépendantes et strictement positives définies sur le même espace de probabilité, admettant chacune la densité

$$\rho(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x).$$

   (a) Vérifier que ρ est bien une densité lebesguienne.
   (b) En utilisant l'Exercice 6, montrer que $Y := X_1/X_2$ admet la densité $q(y) = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{\log(y)}{y^2-1}$.
   (c) En utilisant l'Exercice 7, en déduire la formule

$$\int_0^1 \frac{-\log(y)}{1-y^2}\,dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

(2) Déduire de (1) qu'on a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}^2 = \frac{\pi^2}{8}$, puis démontrer le résultat souhaité.

Exercice 9. (paradoxe de Bertrand)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans le plan. Une **corde de** $\mathcal{C}$ est un segment $[A, A']$, où A et A' sont des points de $\mathcal{C}$. On s'intéresse à la probabilité que la longueur d'une corde "choisie au hasard" soit plus grande que $\sqrt{3}$ (qui est le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle). Dans ce qui suit, on notera X la longueur de la corde.

(1) Dans cette question, on modélise la situation en considérant que les extrémités A et A' de la corde sont choisies au hasard sur le cercle, et indépendamment l'une de l'autre.

(a) On note θ et θ' les angles $\widehat{OxA}$ et $\widehat{OxA'}$ (pris dans $[0, 2\pi[$). Quelle est la loi de $\Phi := (\theta, \theta')$?
(b) Calculer X en fonction de θ et θ'.
(c) Déterminer la loi de X.
(d) Déterminer la probabilité cherchée.

(2) Dans cette question, on modélise la situation d'une autre façon en considérant que le milieu M de la corde $[A, A']$ est choisi au hasard dans le disque unité $\mathbb{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 < 1\}$.

(a) Calculer X en fonction des coordonnés (u, v) de M.
(b) Déterminer la loi de X et la probabilité cherchée.

Exercice 10. Soient $X_1, \dots, X_n$ des va réelles indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. On pose $m := m_1 + \cdots + m_n$ $\sigma^2 := \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. On pose aussi $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la loi de $Z_n = \frac{S_n - m}{\sigma}$.

Exercice 11. Soient X et Y deux va réelles indépendantes, uniformément distribuées sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 12. Soient X et Y deux va indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 13. Soient X_1 et X_2 deux va réelles indépendantes suivant chacune loi de Cauchy $\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\frac{2}{\pi}\frac{dx}{4+x^2}$, puis que $\frac{X_1+X_2}{2}$ suit la loi de Cauchy.

Exercice 14. Soient X et Y deux va réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(1) Déterminer la loi de $X^2 + Y^2$.
(2) On pose $Z = (X, Y)$. Justifier l'existence de deux va R et Θ, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $[0, 2\pi[$ respectivement, telles que $Z = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$.
(3) Déterminer loi de la va (R, Θ), puis les lois de R et de Θ.
(4) Les va R et Θ sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. On dit qu'une va réelle X suit une **loi gamma de paramètres** (α, λ), où $\alpha, \lambda > 0$, si

$$\mathbb{P}_X = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

(1) Montrer que si X et X' sont deux va indépendantes suivant des lois gamma de paramètres (α, λ) et (α', λ), alors $X + X'$ suit une loi gamma de paramètres $(\alpha + \alpha', \lambda)$.
(2) Soient $X_1, \dots, X_n$ des va indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
(3) Montrer que si X est une va suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors X^2 suit une loi gamma de paramètres à déterminer.
(4) Soient $X_1, \dots, X_n$ des va indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$.

Exercice 16. On considère que le nombre annuel de tremblements de terre en Bretagne suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{1}{5}\cdot$ Déterminer la probabilité qu'il y ait (en Bretagne) au moins 4 tremblements de terre en 20 ans.

Exercice 17. Soient X et Y deux va indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X + Y$ a la même loi que X. Montrer que $Y = 0$ presque sûrement.

Exercice 18. Soit $\lambda > 0$, et soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre λ, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Soit également $a > 0$. On définit une va $N : \Omega \to \mathbb{N}$ en posant pour $\omega \in \Omega$:

$$N(\omega) := \#\left\{n \geqslant 1;\ T_1(\omega) + \cdots + T_n(\omega) \leqslant a\right\}.$$

(1) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(N \geqslant k)$ en utilisant l'Exercice 15.
(2) Montrer que N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda a)$.

Exercice 19. Soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de va indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, chaque X_i suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_i)$. On note $K : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la va définie par $K := \min\{k \in \mathbb{N};\ X_k = 1\}$, avec la convention $\min \varnothing = \infty$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(K = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer qu'on a ($K < \infty$ ps) si et seulement si la série $\sum p_i$ diverge.

Exercice 20. Soit $p \in]0,1[$, et soit $(X_i)_{i \geqslant 0}$ une suite de va indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On définit des va $T_0, T_1, T_2, \dots$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : $T_0 := 0$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$T_n := \min\Big\{k > T_{n-1};\ X_k = 1\Big\},$$

avec la convention $\min \varnothing = \infty$.

(1) Montrer que $T_1 < \infty$ presque sûrement, et déterminer la loi de T_1.

(2) Montrer que $\mathbb{P}\big(T_n = l + k \,|\, T_{n-1} = l\big) = \mathbb{P}\big(T_1 = k\big)$ pour tout $n \geqslant 2$ et pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.

(3) Montrer que $T_n < \infty$ presque sûrement pour tout $n \geqslant 2$ et que les va $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et de même loi que T_1.

(4) Calculer la fonction génératrice G_n de T_n pour tout $n \geqslant 2$, et en déduire la loi de T_n.

Exercice 21. Soit $(X_i)_{i\geqslant 0}$ une suite de va indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un univers $(\Lambda, \mathfrak{B})$. On suppose que les X_i suivent toutes la même loi μ. Soit également T une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(T = n)$ appartient à la tribu $\sigma(X_0, \ldots, X_{n-1})$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Montrer que X_T est une va à valeurs dans $(\Lambda, \mathfrak{B})$, et que $\mathbb{P}_{X_T} = \mu$.

Exercice 22. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ (avec la convention $S_0 = 0$), et on définit $S_N : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

(1) Montrer que S_N est une va.

(2) Montrer que si N suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors S_N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

(3) Montrer que si N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m, q)$, alors S_N suit la loi $\mathcal{B}(m, qp)$.

Exercice 23. Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et indépendante des X_i. Enfin, soit S_N la va définie par $S_N(\omega) := S_1(\omega) \cdots + S_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que la fonction génératrice de S_N est donnée par

$$G_{S_N}(s) = G_N(G_X(s)) \qquad \text{pour tout } s \in [-1, 1].$$

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Montrer que si $\inf_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(E_i) > 0$, alors $\overline{\lim}\, E_i \neq \varnothing$.

Exercice 25. Soit $(X_i)_{i\geqslant n}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ pour tout $i \geqslant 1$, où $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n := X_1 + \cdots + X_{2n}$, et on note E_n l'évènement $\{Z_n = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, E_n\big) = 0$.

Exercice 26. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants ayant tous la même probabilité p. Soit également $b \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'évènement défini comme suit : $\omega \in A_k$ si et seulement si il existe un entier $i \in \{k, 2k, \dots, b^k k\}$ tel que $\omega \in E_{i+1} \cap \cdots \cap E_{i+k}$.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in I_k := \{k, 2k, \dots, b^k k\}$, on pose $B_i := E_{i+1} \cap \cdots \cap E_{i+k}$. Montrer qu'on a

$$\sum_{i\in I_k} \mathbb{P}(B_i) \geqslant \mathbb{P}(A_k) \geqslant \sum_{i\in I_k} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{\{(i,j);\, i<j\}} \mathbb{P}(B_i \cap B_j).$$

(2) Montrer que si $p < 1/b$, alors $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, A_k\big) = 0$.

(3) Dans cette question, on suppose que $p = 1/b$.

  (a) Calculer $\mathbb{P}(B_i \cap B_j)$ pour $i, j \in I_k$ et $i < j$.

  (b) Montrer que $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, A_k\big) = 1$.

Exercice 27. Soit X une va réelle à valeurs positives, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X_n > n)$. Montrer qu'on a $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, A_n\big) = 0$ si $\mathbb{E}(X) < \infty$, et $\mathbb{P}\big(\overline{\lim}\, A_n\big) = 1$ si $\mathbb{E}(X) = \infty$.

Exercice 28. Soit $(X_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\overline{\lim}\, \frac{X_n}{\log(n)} = 1 \quad \text{ps.}$$

(1) Pour $\alpha > 0$ et $n \geqslant 2$, on note $A_{n,\alpha}$ l'évènement $\left\{\frac{X_n}{\log(n)} \geqslant \alpha\right\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_{n,\alpha})$.

(2) Montrer qu'on a $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_{n,\alpha}) = 0$ pour tout $\alpha > 1$, et $\mathbb{P}(\overline{\lim}\, A_{n,\alpha}) = 1$ pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$.

(3) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\left\{\overline{\lim}\, \frac{X_n}{\log(n)} > \alpha\right\} \subseteq \overline{\lim}\, A_{n,\alpha} \subseteq \left\{\overline{\lim}\, \frac{X_n}{\log(n)} \geqslant \alpha\right\}.$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 29. Un singe trouve un ordinateur portable sous un baobab. L'ordinateur est allumé, et un fichier LibreOffice est ouvert. Le singe se met immédiatement à utiliser l'ordinateur. Comme c'est tout de même un singe, il frappe sur les touches complètement au hasard ; et comme il trouve cela très amusant, il tape infiniment longtemps.

(1) On note $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$ l'ensemble des touches de l'ordinateur. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la i-ème touche enfoncée par le singe.

(a) Si $\mathbf{m} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_p})$ est une suite finie d'éléments de A et si $k \in \mathbb{N}$ est fixé, quelle est la probabilité de l'évènement $\big\{(X_{k+1}, \ldots, X_{k+p}) = \mathbf{m}\big\}$?

(b) Soit $\mathbf{m} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_p})$ fixé. Pour tout entier $l \in \mathbb{N}$, on note A_l l'évènement $\big\{(X_{lp+1}, \ldots, X_{(l+1)p}) = \mathbf{m}\big\}$. Calculer $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_l)$.

(2) Montrer qu'il est presque certain que le singe écrive une infinité de fois les oeuvres complètes de Victor Hugo.

Exercice 30. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles indépendantes. Montrer qu'on a l'alternative suivante : ou bien la série $\sum X_n$ converge presque sûrement, ou bien cette série diverge presque sûrement.

Exercice 31. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles indépendantes, et soit X une va réelle. On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la va X est $\sigma(X_i,\ i \geqslant N)$-mesurable. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 32. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de va indépendantes à valeurs complexes. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum X_n\, z^n$ est presque sûrement constant.