

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit X une va à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\mathbb{P}(X = k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Dans cette question, on suppose que X suit une **loi géométrique** de paramètre $p \in [0, 1]$, *i.e.* $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
- (*) $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X \geq n+1 | X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq 1)$.
- (2) Dans cette question, on veut établir la réciproque de (1). On suppose donc que (*) est vérifiée, et il s'agit de montrer que X suit une loi géométrique.
- (a) On pose $p = \mathbb{P}(X = 0)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^n$.
- (b) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Soit X une va réelle positive telle que $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.

- (1) Dans cette question, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* $\mathbb{P}_X = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) dx$. Montrer que la propriété suivante est vérifiée :
- (*) $\forall s, t > 0 : \mathbb{P}(X > s+t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.
- (2) Dans cette question, on veut établir la réciproque de (1). On suppose donc que (*) est vérifiée, et on cherche à montrer que X suit une loi exponentielle.
- (a) Pour $t > 0$, on pose $f(t) = -\log \mathbb{P}(X > t)$. Montrer que f vérifie l'équation fonctionnelle $f(t+s) = f(t) + f(s)$.
- (b) En déduire que f est de la forme $f(t) = \lambda t$, pour une certaine constante λ . On a ainsi $\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t > 0$.
- (c) Conclure.

Exercice 3. On lance 2 dés, et on appelle X la somme des chiffres obtenus. Déterminer la loi de X .

Exercice 4. On joue n fois à pile ou face, en misant à chaque fois 1 euro sur "pile". On note G le "gain" obtenu (qui peut être positif ou négatif). Exprimer G en fonction du nombre de "piles" obtenus, puis déterminer la loi de G .

Exercice 5. Soit Z une va réelle suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(Z \geq x) \sim \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Exercice 6. Soit X une va réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Trouver la valeur de T pour laquelle $\mathbb{P}(X \leq T) = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Soit X une va réelle dont la loi \mathbb{P}_X est *diffuse*, i.e. $\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $Z = (X, X)$, qui est donc une va à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

- (1) Montrer que la loi \mathbb{P}_Z est diffuse.
- (2) En observant que \mathbb{P}_Z est portée par la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$, montrer que \mathbb{P}_Z n'est pas une loi à densité.

Exercice 8. Soient $p > 1$, et soit $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\rho(x) = \frac{c}{x^p} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(x)$, où $c \in \mathbb{R}^+$.

- (1) Déterminer la valeur c pour laquelle ρ est une densité lebesgienne.
- (2) Soit X une va réelle telle que $\mathbb{P}_X = \rho(x)dx$. Calculer $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 3)$.

Exercice 9. Soit Z une va réelle uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Déterminer la probabilité que le polynôme $P(x) = x^2 + x + Z$ admette deux racines réelles distinctes.

Exercice 10. Soit Z une va à valeurs dans \mathbb{R}^2 , uniformément distribuée sur $[-1, 2] \times [-1, 1]$. On écrit $Z = (X, Y)$. Calculer $\mathbb{P}(1 - Y \geq 2|X|)$.

Exercice 11. Soit Z une va à densité à valeurs dans \mathbb{R}^2 , de densité $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. On écrit $Z = (X, Y)$. Montrer que X et Y sont des va à densité et déterminer leurs densités ρ_X et ρ_Y (en fonction de ρ).

Exercice 12. Soit $a > 0$, et soit X une va à valeurs dans $]0, a[$, uniformément distribuée sur $]0, a[$. Soit également $b > 0$. Déterminer la loi de $Y = b \log(a/X)$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ la fonction $\rho_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{]0, 1[}(x)$ est une densité lebesgienne. Montrer ensuite que si X est une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \rho_\alpha(x)dx$, alors la loi de $Y = -\alpha \log(X)$ ne dépend pas de α .

Exercice 14. Soit X une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$. Justifier que $Y = 1/X$ est une va bien définie, et déterminer la loi de Y .

Exercice 15. Soit X une va réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et soit $c > 0$. Déterminer la loi de $Y = cX$.

Exercice 16. Montrer que si X est une va réelle à densité et si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, alors $aX + b$ suit la loi $\frac{1}{|a|}\rho_X\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$. En déduire que si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

Exercice 17. Soit X une va à valeurs dans \mathbb{N} et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$, *i.e.* $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de $Y = \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

Exercice 18. Soit $\alpha : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive qui n'est pas presque partout égale à 0, et vérifie de plus $\int_0^\infty r\alpha(r) dr < \infty$.

- (1) Montrer qu'on définit une densité lebesgienne sur \mathbb{R}^2 en posant $\rho(x, y) = c\alpha(x^2 + y^2)$, où c est une constante à déterminer.
- (2) Montrer que si Z est une va à valeurs dans \mathbb{R}^2 telle que $\mathbb{P}_Z = \rho(x, y)dx dy$, alors \mathbb{P}_Z est *invariante par isométries* : pour toute isométrie $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{P}_{\Phi(Z)} = \mathbb{P}_Z$.

Exercice 19. Soit X une va à valeurs dans \mathbb{R}^d . On suppose que X est **symétrique**, ce qui signifie que $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_X(-A)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Soit également ε une va à valeur dans $\{-1, 1\}$ et indépendante de X . Montrer que $Y = \varepsilon X$ a la même loi que X .

Exercice 20. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivant une loi de Rademacher ($\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1)$). On pose $X_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3$, $X_2 = \varepsilon_3\varepsilon_1$ et $X_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Montrer que X_1, X_2, X_3 suivent chacune une loi de Rademacher, qu'elles sont deux à deux indépendantes, mais qu'elles ne sont pas indépendantes.

Exercice 21. Soit $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et suivant une loi de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i$. Montrer que les va w_n sont indépendantes.

Exercice 22. (fonctions génératrices)

Si X est une va à valeurs dans \mathbb{N} , la **fonction génératrice de X** est la fonction $G_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

- (1) Justifier la définition, et montrer que G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

- (2) Montrer que *la fonction génératrice détermine la loi* : si X_1 et X_2 sont deux va telles que $G_{X_1} = G_{X_2}$, alors $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_2}$.
- (3) Calculer G_X dans les cas suivants :
- (i) X suit une loi de Bernoulli de paramètre p ;
 - (ii) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$;
 - (iii) X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
- (4) Montrer que si X et Y sont des va indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
- (5) Établir les résultats suivants :
- (a) si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$;
 - (b) si X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 23. Soit X une va réelle. Déterminer la fonction de répartition de X dans les cas suivants.

- (i) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
- (ii) X soit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, *i.e.* $\mathbb{P}_X = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) dx$.
- (iii) X suit la loi de Cauchy, $\mathbb{P}_X = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Exercice 24. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$, et soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = \frac{1}{3}$ si $a \leq x < b$ et $F(x) = 1$ si $x \geq b$. Montrer que F est la fonction de répartition d'un va réelle X , et déterminer la loi de X .

Exercice 25. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{2^i}, \infty[}(x)$. Montrer que F est la fonction de répartition d'un va réelle X , et calculer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X \geq 1)$ et $\mathbb{P}(X < 0)$.

Exercice 26. Soit X une va réelle. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}_X(\{a\}) = F_X(a) - F_X(a^-)$. En particulier, F_X est continue si et seulement si \mathbb{P}_X est une mesure diffuse.

Exercice 27. Soit X une va réelle. On suppose que F_X est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus F$, où F est un ensemble fini. Montrer que X est une va à densité.

Exercice 28. Soit X une va réelle. On suppose que pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \in A) = 0$ ou 1 . Montrer que la fonction de répartition de X est une fonction indicatrice, et en déduire que X est presque sûrement constante (autrement dit, qu'il existe un nombre réel c tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$).

Exercice 29. Soit X une va à valeurs dans un espace métrique complet séparable (Λ, d) . On suppose que pour tout borélien $A \subseteq \Lambda$, on a $\mathbb{P}(X \in A) = 0$ ou 1 .

- (1) Montrer que X est réunion dénombrable de boules ouvertes, et en déduire qu'il existe une boule ouverte $B_0 \subseteq \Lambda$ telle que $\mathbb{P}(X \in B_0) = 1$.
- (2) Montrer que si B est une boule ouverte de Λ telle que $\mathbb{P}(X \in B) = 1$, alors il existe une boule ouverte B' telle que $\overline{B'} \subseteq B$, $\text{diam}(\overline{B'}) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(\overline{B})$ et $\mathbb{P}(X \in B') = 1$.
- (3) Montrer que la va X est presque sûrement constante, autrement dit qu'il existe un point $a \in \Lambda$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Exercice 30. Soit X une va à valeurs dans un espace métrique complet séparable Λ . On suppose que X est indépendante d'elle-même. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 31. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. On pose $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$

- (1) Exprimer les fonctions de répartition de M et m en fonction de celles de X et de Y .
- (2) Dédire de (1) que si X et Y admettent des densités continues, alors M et m également, et donner des formules pour ces densités.
- (3) Dans cette question, on suppose que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ . Calculer explicitement la fonction de répartition de $m = \min(X, Y)$, et en déduire la loi de m .

Exercice 32. Soit X une va réelle à densité, et soit Y une va à valeurs dans \mathbb{N}^* . On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que la va $Z = \frac{X}{Y}$ est à densité.

Exercice 33. (problème de l'aiguille de Buffon)

On jette au hasard une aiguille de longueur l sur un parquet composé de planches parallèles ayant la même largeur $d > l$. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité p que l'aiguille tombe à cheval sur une des rainures du parquet.

- (1) On note Y la distance du milieu de l'aiguille à la rainure du parquet la plus proche, et Θ l'angle aigu entre l'aiguille et la direction des rainures. Ainsi, on a $0 \leq Y < \frac{d}{2}$ et $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$. Montrer que l'aiguille tombe à cheval sur une rainure si et seulement si $Y < \frac{l}{2} \sin \Theta$.
- (2) Déterminer la probabilité p en supposant que (Y, Θ) est uniformément distribuée sur $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 34. (indépendance et courbes de Peano)

Soit τ une variable à valeurs dans un intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}$, et uniformément distribuée sur I . Soient également x et y deux fonctions continues sur I , à valeurs réelles. On suppose que les variables $x(\tau)$ et $y(\tau)$ sont indépendantes.

- (1) Soient $u \in x(I)$ et $v \in y(I)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|x(\tau) - u| < \varepsilon, |y(\tau) - v| < \varepsilon) > 0.$$

- (2) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Montrer que $\gamma(I)$ est le rectangle $x(I) \times y(I)$. (Ainsi, $\gamma(I)$ est une "courbe continue qui remplit un rectangle".)