Feuille d'exercices n$^{\mathrm{o}}$ 1

Exercice 1. Soit Ω un ensemble fini. Montrer que toute algèbre $\mathfrak{A}$ de parties de Ω est en fait une tribu, et que toute fonction finiment additive $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ telle que $\mu(\varnothing) = 0$ est en fait une mesure.

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(\{a\})$ soit la même pour tous les $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. On note $\mathfrak{A}$ la famille de toutes les parties A de $\mathbb{N}$ telles que $\frac{\#\big(A \cap [0, n[\big)}{n}$ admette une limite quand $n \to \infty$; et pour $A \in \mathfrak{A}$, on pose

$$\mathbb{P}_0(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\big(A \cap [0, n[\big)}{n} \cdot$$

(1) Établir les faits suivants : (i) $\mathfrak{A}$ contient $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}_0(\mathbb{N}) = 1$; (ii) $\mathfrak{A}$ contient tous les singletons et $\mathbb{P}_0(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{N}$; (iii) $\mathfrak{A}$ est stable par complémentation ; (iv) $\mathfrak{A}$ est stable par réunions finies disjointes et $\mathbb{P}_0$ est finiment additive sur $\mathfrak{A}$.

(2) Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \ldots, b-1\}$. Déterminer la probabilité, au sens de la "loi" $\mathbb{P}_0$, qu'un entier soit congru à r modulo b.

Exercice 4. On conserve les notations de l'Exercice 3. Montrer que l'ensemble $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\![(2k)!, (2k+1)![\![$ n'appartient pas à $\mathfrak{A}$, et en déduire que la famille $\mathfrak{A}$ n'est pas une tribu. (On peut en fait montrer que $\mathfrak{A}$ n'est même pas une *algèbre*.)

Exercice 5. On conserve les notations de l'Exercice 3. Déterminer la probabilité qu'un entier soit un carré parfait.

Exercice 6. Quand on lance 3 dés, a-t-on plus de chances d'obtenir 11 ou bien d'obtenir 12 ?

Exercice 7. Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois "6" ? De même, combien de fois faut-il lancer deux dés pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un "double 6" ?

Exercice 8. On lance plusieurs fois un dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quelle est la probabilité d'obtenir "6" pour la 1ère fois au n-ième coup ?

Exercice 9. (problème du chevalier de Méré)
Deux souris, l'une blanche et l'autre grise, trouvent un morceau de fromage et se disputent pour savoir qui va le manger. Pour règler la dispute, elles décident de jouer un certain nombre de parties d'un jeu de hasard non spécifié. La première à avoir gagné 10 parties pourra manger le morceau de fromage. Au bout de 14 parties, la souris blanche a gagné 8 fois et la souris grise 6 fois. A ce moment, les souris se disent qu'elles ont vraiment trop faim et qu'il vaut mieux se partager le morceau de fromage en tenant compte des parties déjà jouées. Comment doivent elles faire pour que le partage soit "juste" ?

Exercice 10. Une grille d'euromillion comporte 5 numéros entre 1 et 50, et 2 numéros entre 1 et 12.

(1) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?
(2) À combien de tirages faut-il participer (en jouant 1 grille à chaque fois) pour avoir au moins une chance sur 100 de gagner au moins une fois le gros lot ?

Exercice 11. La sorcière apporte à Blanche Neige un cageot de 18 pommes dans lequel elle a placé 6 pommes empoisonnées. Comme Blanche Neige a très faim, elle mange 4 pommes. Quelle est la probabilité qu'elle mange une pomme empoisonnée ?

Exercice 12. On considère un groupe de n personnes prises au hasard, dont aucune n'est née un 29 Février.

(1) Déterminer la probabilité p que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire.
(2) Vérifier que si $n \geqslant 23$, alors $p > 50\%$; que si $n \geqslant 30$, alors $p > 70\%$; et que si $n \geqslant 57$, alors $p > 99\%$.

Exercice 13. On achète une galette des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et a été placée "au hasard" dans la galette. Étant donné $l \geqslant 0$, quelle est la probabilité que le centre de la fève se trouve à une distance au plus égale à l cm du centre de la galette ?

Exercice 14. On coupe en 4 une galette des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et a été placée "au hasard" dans la galette. Déterminer la probabilité de couper sur la fève.

Exercice 15. On coupe en 4 une galettes des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et dont on sait que le centre se trouve à 8cm du centre de la galette. Déterminer la probabilité de couper sur la fève.

Exercice 16. (problème des rencontres)
Deux individus A et B (sans doute des espions) projettent d'essayer de se rencontrer à un certain endroit. Il est convenu que A et B doivent se rendre à l'endroit prévu entre 12h et 13h, et que chacun doit attendre l'autre au plus 20 minutes et repartir si la rencontre n'a pas eu lieu dans les 20 minutes.

(1) Si A arrive à 12h et x minutes au point de rendez-vous et si B arrive à 12h et y minutes, à quelle condition portant sur x et y la rencontre aura-t-elle lieu ?

(2) Déterminer la probabilité que la rencontre ait effectivement lieu.

Exercice 17. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, N\}$, on note $p_{N,k}$ la probabilité d'obtenir exactement k fois "pile" en lançant N fois une pièce de monnaie (non truquée).

(1) Exprimer $p_{N,k}$ en fonction de N et de k, et calculer $p_{20,10}$.

(2) Déterminer, si elle existe, la limite de $p_{2n,n}$ quand $n \to \infty$. Ce résultat est-il surprenant ?

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n la probabilité d'obtenir un nombre de "piles" compris entre $9n$ et $11n$ quand on lance $20n$ fois la pièce. En utilisant la formule de Stirling, montrer que q_n tend vers 1 quand $n \to \infty$.

Exercice 18. Une boite opaque contient N dragibus noirs et M dragibus rouges.

(1) On prend au hasard n dragibus dans la boite. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, quelle est la probabilité d'avoir tiré k dragibus rouges ?

(2) Même question si on a pris les n dragibus un par un en les remettant à chaque fois dans la boite.

(3) Même question si on a pris les n dragibus un par un et qu'on les a mangés au fur et à mesure.

Exercice 19. (tirage "sans remise" vs tirage "avec remise")
Une collection de N objets comprend N_1 objets "de type 1" et $N_2 = N - N_1$ objets "de type 2". On prélève au hasard n objets dans la collection, avec $n \leqslant N_1$.

(1) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ donné, déterminer la probabilité qu'exactement k parmi les n objets prélevés soient "de type 1".

(2) Montrer que si n est très petit devant N_1 et N_2, alors cette probabilité est approximativement égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où $p = \frac{N_1}{N}$.

(3) On suppose que N est très grand devant n, et que 1 objet sur 50 est “de type 1”. Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que la probabilité qu'aucun des objets prélevés ne soit “de type 1” est au moins égale à $e^{-n/49}$. (En particulier, si $n = 50$, cette probabilité est au moins égale à $0,36$, ce qui peut paraitre contre-intuitif.)

Exercice 20. Dans un pays où le vote est obligatoire, une élection oppose 2 candidats C_1 et C_2. Il y a N électeurs dans le pays, dont N_1 ont l'intention de voter pour C_1 et N_2 ont l'intention de voter pour C_2.

(1) On effectue un sondage auprès de n électeurs (dont on suppose *a priori* qu'ils ne vont pas mentir). Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, on note p_k la probabilité que k électeurs parmi les n sondés disent avoir l'intention de voter pour C_1. Montrer que si N_1 et N_2 sont très grands devant n, alors on peut considérer que p_k est à peu près égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où $p = N_1/N$.

(2) En réalité, 60% des électeurs ont l'intention de voter pour le candidat C_1. Montrer que si on interroge 9 électeurs (!) au hasard, la probabilité que ce micro-sondage le donne perdant est supérieure à $0,46$.

Exercice 21. On tire 5 cartes dans un jeu de 52. Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan (mais pas mieux) ?

Exercice 22. Un tiroir contient $2n$ chaussettes. Pressé par le temps, le propriétaire des chaussettes prend 2 chaussettes au hasard dans le tiroir. Quelle est la probabilité qu'il ait pris 2 chaussettes de la même paire ?

Exercice 23. (problème de Monty Hall)

Dans un jeu télévisé, le candidat a devant lui 3 boites fermées (et opaques). L'une de ces boites contient un lingot d'or, et les deux autres sont vides. L'animateur sait quelle boite contient le lingot d'or. Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat désigne une des 3 boites, sans l'ouvrir ; puis l'animateur ouvre une boite *vide* parmi celles non désignées par le candidat ; puis le candidat ouvre une des 2 boites restantes, et gagne le lingot d'or si celui ci s'y trouve. Quelle est la meilleure “stratégie” pour le candidat : décider à l'avance qu'il va changer de boite, décider à l'avance qu'il va s'en tenir à la boite qu'il désigne au départ, ou bien décider de choisir au hasard quand arrive le moment d'ouvrir une boite ?

Exercice 24. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Montrer que si $E_1, \dots, E_n$ sont des évènements, alors

$$\mathbf{1}_{E_1 \cup \cdots \cup E_n} = \mathbf{1} - \prod_{i=1}^{n} (\mathbf{1} - \mathbf{1}_{E_i}).$$

En déduire la formule suivante, appelée **formule de Poincaré**, ou encore **principe d'inclusion-exclusion** :

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} \mathbb{P}(E_{j_1} \cap \cdots \cap E_{j_k}) \right).$$

Exercice 25. Une personne envoie des cartes de voeux personnalisées à n de ses amis. Comme cette personne est un peu étourdie, elle referme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, et se trouve donc "obligée" d'écrire les adresses au hasard.

(1) On note p la probabilité que personne ne reçoive la carte qui lui était destinée. En utilisant la formule de Poincaré (Exercice 24), montrer que

$$p = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot$$

(2) Montrer que si $n \geqslant 7$, il y a entre 36% et 37% de chances que personne ne reçoive la carte qui lui est destinée.

Exercice 26. On reprend les notations de l'Exercice 3. Le but de l'exercice est de montrer que presque tous les entiers (au sens de $\mathbb{P}_0$) sont non-premiers. Autrement dit, en notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, que $\mathbb{P}_0(\mathcal{P})$ existe et vaut 0. Dans la suite, on notera $(p_i)_{i \geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant ; et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\pi(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

(1) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $\pi_r(n)$ l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, n\}$ qui ne sont pas divisibles par $p_1, \dots, p_r$.

(a) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 24), montrer que

$$\pi_r(n) = n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} E\Big(\frac{n}{p_i}\Big) + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant r} E\Big(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}\Big) - \cdots + (-1)^r E\Big(\frac{n}{p_1 \cdots p_r}\Big).$$

(b) En déduire que

$$\pi_r(n) \leqslant n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^r.$$

(2) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\pi(n) \leqslant n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^r + r.$$

(3) Montrer que $\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ tend vers 0 quand $r \to \infty$.

(4) Déduire de (2) et (3) que $\frac{\pi(n)}{n}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, et conclure.

Exercice 27. On fait sécher n paires de chaussettes, toutes différentes mais (malheureusement) toutes de la même couleur. Pour ne pas s'abimer les yeux, on constitue ensuite des paires au hasard. Cependant, on peut sans difficulté distinguer les chaussettes "gauches" des chaussettes "droites". Quelle est la probabilité de constituer correctement toutes les paires ? De constituer correctement au moins une paire ?

Exercice 28. Sur une planète imaginaire, 1% des lapins sont carnivores. Si on choisit 100 lapins au hasard, quelle est la probabilité qu'exactement 1 lapin soit carnivore ? Qu'au moins 3 lapins soient carnivores ?

Exercice 29. (Théorème de Poisson)
Soit $(\mathbb{P}_n)$ une suite de lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}_n$ est en fait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, *i.e.* $\mathbb{P}_n$ est portée par $\{0, \ldots, n\}$ et $\mathbb{P}_n(\{k\}) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$ pour $k = 0, \ldots, n$. On suppose également que np_n admet une limite $\lambda > 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $(\mathbb{P}_n)$ "converge" vers une certaine loi de probabilité $\mathbb{P}$ à déterminer, au sens où $\mathbb{P}_n(\{k\}) \to \mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé quand $n \to \infty$.

Exercice 30. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités sur un univers Ω supposé dénombrable, et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. On suppose que $\mathbb{P}_n(\{\omega\}) \to \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$ quand $n \to \infty$.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un ensemble fini $F \subseteq \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega \backslash F) < \varepsilon$, puis montrer qu'il existe un entier n_0 tell que $\forall n \geqslant n_0 \ : \ \mathbb{P}_n(\Omega \backslash F) < \varepsilon$.

(2) Montrer que $\mathbb{P}_n(A) \to \mathbb{P}(A)$ pour tout ensembe $A \subseteq \Omega$.

Exercice 31. Soient ρ_1 et ρ_2 deux densités lebesguiennes sur $\mathbb{R}^d$. On note $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ les lois de probabilité associées. Montrer qu'on a $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ si et seulement si $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue λ_d).

Exercice 32. Pour $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}_{m,\sigma} = g_{m,\sigma}(x)dx$, où $g_{\sigma,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la densité Lebesguienne définie par par

$$g_{\sigma,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Montrer que $\mathbb{P}_{\sigma,m}$ "tend vers la masse de Dirac δ_m" quand $\sigma \to 0$, au sens suivant : pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_{\sigma,m} = f(m).$$

Exercice 33. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité vérifiant la propriété suivante : pour tout $E \in \mathfrak{A}$ et pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(E)]$, il existe $A \subseteq E$ tel que $\mathbb{P}(A) = x$. Soit également donnée, pour tout $E \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbb{P}(E) \neq 0$, une application $\mathbb{P}_E : \mathfrak{A} \to [0, 1]$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\mathbb{P}_E$ est une loi de probabilité ;

(ii) $\mathbb{P}_E(E) = 1$;

(iii) si $A \subseteq E$, alors $\mathbb{P}_E(A)$ ne dépend que de $\mathbb{P}(A)$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $\mathbb{P}_E(A) = \mathbb{P}(A \,|\, E)$ pour tout E et pour tout $A \in \mathfrak{A}$. Dans ce qui suit, on fixe $E \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbb{P}(E) \neq 0$ et on pose $c := 1/\mathbb{P}(E)$.

(1) Justifier qu'il existe une fonction $\varphi : [0, \mathbb{P}(E)] \to [0, 1]$ telle que
$$\varphi(x) = \mathbb{P}_E(A) \qquad \text{pour tout } A \subseteq E \text{ tel que } \mathbb{P}(A) = x.$$

(2) Montrer qu'on a $\mathbb{P}_E(A) = \varphi\big(\mathbb{P}(A \cap E)\big)$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$.

(3) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(\mathbb{P}(E))$.

(4) Montrer que si $0 \leqslant x, y \leqslant \mathbb{P}(E)$ et $x + y \leqslant \mathbb{P}(E)$, alors $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

(5) En déduire que $\varphi(rv) = r\varphi(v)$ pour tout $v \in [0, \mathbb{P}(E)]$ et pour tout rationnel $r \geqslant 0$ tel que $rv \leqslant \mathbb{P}(E)$.

(6) Montrer que la fonction φ est croissante.

(7) Montrer que $\varphi(x) = c\, x$ pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(E)]$, et conclure.

Exercice 34. Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité (borélienne) sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathbb{P}$ est diffuse, *i.e.* $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) := (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ vérifie la propriété de l'Exercice 33. (Commencer par montrer que la fonction $t \mapsto \mathbb{P}(]-\infty, t])$ est continue sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 35. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soient E, F deux évènements tels que $0 < \mathbb{P}(E) < 1$ et $0 < \mathbb{P}(F) < 1$. Montrer qu'on a $\mathbb{P}(E \,|\, F) > \mathbb{P}(E)$ si et seulement si $\mathbb{P}(F \,|\, E) > \mathbb{P}(F \,|\, E^c)$.

Exercice 36. Une boite opaque contient 30 dragibus noirs et 40 dragibus rouges. Une petite fille n'aimant que les dragibus noirs tire 5 dragibus l'un après l'autre. Si le dragibus qu'elle tire est noir, elle le mange ; et s'il est rouge, elle le remet dans la boite. Quelle est la probabilité que la petite fille mange exactement 3 dragibus ?

Exercice 37. La même petite fille qu'à l'Exercice 36 a devant elle 3 boites opaques. La 1ère boite contient 10 dragibus noirs et 30 dragibus rouges, la 2ème contient 40 dragibus noirs et 20 dragibus rouges, et la 3ème contient 20 dragibus noirs et 20 dragibus rouges. La petite fille choisit une boite au hasard, et prend un dragibus dedans. Quelle est la probabilité qu'elle mange le dragibus ?

Exercice 38. Une boite contient 10 dragibus, les uns noirs et les autres rouges. Quelle est la probabilité que tous les dragibus soient rouges sachant qu'au moins l'un d'entre eux est rouge ?

Exercice 39. On choisit un entier N au hasard selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, puis on lance N fois un dé. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6.

Exercice 40. Dans une entreprise imaginaire, une personne A doit faire parvenir à une personne B une information de type binaire ("stop" ou "encore"). Comme la répartition des rôles dans l'entreprise est très précisément fixée, l'information doit impérativement passer par un certain nombre d'intermédiaires avant d'arriver jusquà B. À chaque étape, il y a une probabilité $p \in]0,1[$ que l'intermédiaire ne transmette pas correctement l'information.

(1) Déterminer, pour tout $n \geqslant 0$, la probabilité q_n que l'information émise par A soit correctement transmise à B s'il y a n intermédiaires entre A et B. (Commencer par déterminer une relation de récurrence entre q_{n+1} et q_n.)

(2) Déterminer, si elle existe, la limite de q_n quand n tend vers l'infini.

(3) L'entreprise est en fait tellement grande qu'on ignore complètement le nombre n d'intermédiaires entre A et B. On a cependant de bonnes raisons de penser que n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, autrement dit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot$. Calculer la probabilité que l'information soit correctement transmise.

Exercice 41. (loi de succession de Laplace)

On pioche des dragibus dans une boîte opaque. La boîte contient des dragibus noirs et des dragibus roses. Il y a N dragibus au total, et on n'a aucune information *a priori* sur la proportion de dragibus noirs

(1) Soit $n < N$ et soit $r \leqslant n$. On note $p_{n+1|r}(N)$ la probabilité que le $n+1$-ième dragibus tiré soit noir sachant que r parmi les n premiers dragibus tirés sont noirs. Calculer $p_{n+1|r}(N)$.

(2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \leqslant n$. Déterminer la limite de $p_{n+1|r}(N)$ quand $N \to \infty$. Montrer en particulier que $\lim_{N\to\infty} p_{n+1|n}(N) = \frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 42. On se place dans les conditions de l'Exercice 41, et on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe également $\alpha \in [0,1]$. En supposant $N > n$, on note $q_{\alpha|n}(N)$ la probabilité que la proportion de dragibus noirs soit au moins égale à α sachant que les n premiers dragibus tirés sont noirs. Montrer que si N est très grand, on peut considérer que $q_{\alpha|n}(N)$ est approximativement égale à $1 - \alpha^{n+1}$.

Exercice 43. ("urne de Pólya")
Soient $b, r, c \in \mathbb{N}^*$. Une boite opaque contient initialement b dragibus bleus et r dragibus rouges. On effectue l'opération suivante : on tire un dragibus au hasard dans la boite, puis on le remet en même temps que c dragibus de la même couleur. Cette opération est répétée une infinité de fois.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement "le n-ième tirage amène un dragibus bleu". Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour tout n.

(2) Dans cette question, on suppose que $b = r = c = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de dragibus bleus dans la boite après qu'on a effectué n fois l'opération décrite plus haut. Montrer que $X_n \in \{1, \dots, n+1\}$ et qu'on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$. (Autrement dit, la variable aléatoire X_n est uniformément distribuée sur l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$.)

Exercice 44. (reproduction des bidragibus)
Un bidragibus est une créature composée de 2 dragibus magiques. Les dragibus magiques ne peuvent être que noirs ou rouges (N ou R). Il existe donc trois types de bidragibus : NN, NR et RR. Lorsque deux bidragibus se rencontrent, ils se reproduisent : chacun des deux dédouble au hasard l'un des dragibus magiques qui le constituent, et l'enfant bidragibus est formé avec les 2 nouveaux dragibus.

(1) On considère une population de bidragibus dont les proportions de NN, NR et RR sont respectivement p_0, q_0 et r_0. On fait se rencontrer deux bigragibus $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$ pris au hasard. Déterminer les probabilités p_1, q_1, r_1 que leur enfant soit de type NN, NR, RR.

(2) On part maintenant d'une population de bidragibus dont les proportions de NN, NR, RR sont p_1, q_1, r_1, et on répète l'expérience précédente. Avec les notations qu'on pense, montrer que $(p_2, q_2, r_2) = (p_1, q_1, r_1)$.

Exercice 45. 200 personnes regardent ensemble la finale de la Champions League, qui oppose le PSG au Bayern Munich. Il y a dans l'assistance 50 supporters du PSG, 50 supporters du Bayern, 40 supporters de Barcelone, 30 supporters du Real Madrid et 30 supporters du RC Lens. Parmi les supporters de Barcelone, 35 soutiennent le Bayern, 1 soutient le PSG et 4 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du Real, 20 soutiennent le PSG, 5 soutiennent le Bayern et 5 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du RC Lens, 10 soutiennent le PSG, 10 soutiennent le Bayern et 10 ne soutiennent aucune équipe. On interroge une personne au hasard, qui dit soutenir le Bayern. Quelle est la probabilité que cette personne soit supportrice du RC Lens ?

Exercice 46. Aux Jeux Olympiques, tous les médaillés subissent un contrôle antidopage. Le contrôle est efficace à 99%, mais 1% de vainqueurs "propres" sont cependant contrôlés positifs.

(1) On subodore que 1 médaillé sur 10 est dopé. Dans ces conditions, peut-on considérer que le test est fiable ?
(2) Même question si on subodore que 1 vainqueur sur 200 est dopé.

Exercice 47. Monsieur Fantasio est désespéré car 80% des courriers électroniques qu'il reçoit sont indésirables. En lisant un magazine très sérieux, il apprend que 60% des courriers électroniques indésirables contiennent le mot "zorglub", tandis que seulement 1% des courriers légitimes contiennent ce mot. Il décide donc de filtrer les messages qu'il reçoit de la façon suivante : si un message contient le mot "zorglub", il est automatiquement dirigé vers la boîte de spams, et s'il ne contient pas "zorglub" il est dirigé vers la boîte de réception.

(1) Quelle est la probabilité qu'un message arrivé dans les spams soit indésirable ?
(2) Quelle est la probabilité qu'un message arrivé dans la boîte de réception soit légitime ?

Exercice 48. Dans un pays imaginaire, une étude menée par des experts internationaux montre que 1% des fonctionnaires sont des feignants. Désireux d'éliminer ces parasites qui coûtent un pognon de dingue, le roi du pays ordonne que l'on soumette tous les fonctionnaires à une évaluation poussée, et que les feignants soient immédiatement déchus de leur nationalité et donc envoyés sur Mars. L'évaluation est très performante : la probabilité qu'un individu soit déclaré feignant s'il l'est effectivement est de $99,9\%$. Cependant, elle n'est pas parfaite : il y a 5% de chances qu'un individu soit déclaré feignant après l'évaluation alors qu'il ne l'est pas. Déterminer la probabilité qu'un fonctionnaire envoyé sur Mars le soit par erreur.

Exercice 49. Une maladie touche $x\%$ d'une population. On peut la dépister en effectuant un test sanguin. Le test est efficace à 98%, mais cependant 3% d'individus non malades sont déclarés malades par le test. Déterminer en fonction de x la probabilité qu'un individu déclaré malade le soit effectivement. Que vaut cette probabilité lorsque $x = 0,1$? Pour quelles valeurs de x cette probabilité est-elle supérieure à 90% ?

Exercice 50. Un petit supermarché possède 2 caisses. Une étude concernant le temps d'attente en caisse donne les résultats suivants : la probabilité qu'une file d'attente avance lentement est de 20% ; la probabilité qu'un client observe la file voisine si la sienne avance rapidement est de 4% ; la probabilité qu'un client observe la file voisine si la sienne avance lentement est de 95% ; la probabilité que la file voisine de celle où se trouve un client avance rapidement est indépendante du fait que ce client l'observe ou non, et indépendante de la vitesse de progression de sa propre file. Quelle est la probabilité qu'un client observant la file voisine constate que la file voisine avance rapidement et que sa propre file avance lentement ?

Exercice 51. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Que peut-on dire de la probabilité d'un évènement E qui est indépendant de lui même ?

Exercice 52. Soit n un entier, $n \geqslant 2$. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $m \in \{1, \ldots, n\}$ qui sont premiers avec n, et $p_1 < \cdots < p_s$ les diviseurs premiers de n.

(1) Soit $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ muni de la probabilité uniforme. Pour $i = 1, \ldots, s$, on note E_i l'évènement "être divisible par p_i". Montrer que les évènements $E_1, \ldots, E_s$ sont indépendants.

(2) Établir la formule

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$