L3, Probabilités

Examen du 17 Juin 2019

Durée : 3h

Cet examen est constitué uniquement de "questions de cours"

Remarque. Toutes les variables aléatoires considérées sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

(1) Un paquet de dragibus contient 15% de dragibus rouges, 25% de dragibus noirs et 60% de dragibus verts. On sait que 80% des dragibus rouges, 50% des dragibus noirs et 10% des dragibus verts sont empoisonnés. Déterminer la probabilité qu'un dragibus soit vert sachant qu'il est empoisonné.

(2) Soit c une va réelle uniformément distribuée sur $[-2, 2]$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $f_\omega :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\omega(t) := \frac{t-c(\omega)}{t+1}\cdot$ Déterminer la probabilité que la fonction f_ω soit croissante.

(3) Soient X et Y deux va réelles indépendantes et uniformément distribuées sur $]0, 1[$. Montrer que XY suit la loi $\mathbf{1}_{]0,1[}(u) \log(1/u)du$.

(4) Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de même loi $\mu := \frac{1}{t^2}\, \mathbf{1}_{[1,\infty[}(t)dt$. Calculer $\mathbb{P}\big(X \geq \sqrt{Y}\big)$.

(5) Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance d'une va suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, et la variance d'une va suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

(6) Soient $g_1, \dots, g_n$ des va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\big)^2\Big)$ en fonction de $a_1, \dots, a_n$.

(7) Soit X une va réelle, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des X_i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, on note Z la va définie par $Z(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1 + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$. Montrer que que si X et N sont dans L^1, alors $Z \in L^1$ et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{E}(X)$. (Il pourra être utile d'observer que $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=n\}} S_n$).

(8) Soit X une va réelle telle que $X \geq 1$ ps. On suppose qu'il existe une constante A telle que $\forall s \geq 1 \;\;:\;\; \mathbb{P}(X > s) \leq \frac{A}{s}\cdot$ Montrer que la va $Y := \log(X)$ appartient à L^p pour tout $p < \infty$.

(9) Énoncer le Lemme de Borel-Cantelli, et démontrer la partie “triviale”.

(10) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va réelles. On suppose que les X_n sont dans L^p pour un certain $p > 1$, et que la suite (X_n) est bornée dans L^p. Pour $n \geq 1$ et $a > 0$, majorer $\mathbb{P}(|X_n| \geq a)$ à l'aide de $\|X_n\|_p$; puis montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0.

(11) Montrer que pour une suite de va réelles, la convergence en norme L^1 entraine la convergence en probabilité et la convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

(12) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Cauchy $\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}\cdot$ Pour $n \geq 1$ on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, M_n)$. Calculer la fonction de répartition de M_n, puis montrer que la suite $(\frac{M_n}{n})$ converge en loi vers une va $Z > 0$ telle que $\frac{1}{Z}$ suit une loi exponentielle de paramètre à déterminer.

(13) Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, continue au point $m = \frac{a+b}{2}\cdot$ En appliquant convenablement la loi des grands nombres, montrer que $\frac{1}{(b-a)^n}\int_{[a,b]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$ tend vers $f(m)$ quand $n \to \infty$.

(14) On lance un dé une infinité de fois. Pour $k \geq 1$, on note N_k le nombre de “5” obtenus après k lancers. En utilisant le Théorème Limite Central, montrer que $\mathbb{P}(N_k \geq \frac{k}{6} + \sqrt{k})$ admet une limite L à déterminer quand $k \to \infty$.

(15) Calculer la fonction caractéristique d'une va réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et en déduire que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres à déterminer.

(16) Montrer que si X est une va réelle bornée, alors sa fonction caractéristique φ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et exprimer $\varphi_X^{(k)}(0)$ en fonction de $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que si X et Y sont deux va réelles bornées telles que $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont la même loi.