Examen du 9 Mai 2019

Durée : 3h

Remarque. Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Questions de cours.

(1) Soit $(X_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de va réelles.

(a) On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs (ε_k) tendant vers 0 telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon_k) < \infty$. Montrer que $|X_k| \xrightarrow{\text{ps}} 0$.

(b) On suppose qu'on a $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(|X_k| \geqslant 2^{-k}\big) < \infty$. Montrer que la série $\sum X_k$ converge presque sûrement.

(2) Montrer que la convergence en norme L^1 entraine la convergence en probabilité, et que la convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

(3) Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que Z_n suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p_n)$, et que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ quand $n \to \infty$, pour un certain $\lambda > 0$. Montrer que (Z_n) converge en loi vers une va Z suivant une loi à déterminer.

(4) Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$. Déterminer la fonction de répartition de Z_n, puis montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers la constante $1/\lambda$.

(5) Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va réelles deux à deux indépendantes, appartenant à L^2 et centrées. On suppose que la suite (X_i) est bornée dans L^2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\frac{S_n}{n^\alpha}$ tend vers 0 en norme L^2, pour tout $\alpha > 1/2$.

(6) Soit $\lambda > 0$, et soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ. Soit également $a < \lambda$. Montrer que

$$Z_n := \frac{e^{aX_1} + \cdots + e^{aX_n}}{n}$$

converge presque sûrement vers une constante à déterminer.

(7) Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur un intervalle $[a,b]$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathbb{P}\Big(\big|\frac{S_n}{n} - \frac{a+b}{2}\big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ quand $n \to \infty$.

(8) Calculer la fonction caractéristique d'une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et en déduire que si X et Y sont deux va indépendantes suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. Soit également $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Enfin, on définit une va $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : si $\omega \in \Omega$, alors $T(\omega)$ le plus petit entier n tel que $S_n(\omega) \geqslant a$ s'il en existe un, et $T(\omega) = \infty$ si $S_n(\omega) < a$ pour tout $n \geqslant 1$.

(1) Montrer que T est en fait à valeurs dans $\{a, a+1, a+2, \ldots\} \cup \{\infty\}$.

(2) Montrer que l'évènement $\overline{\lim}\,\{X_i = 1\}$ est de probabilité égale à 1, et en déduire que $T < \infty$ ps.

(3) Montrer que si $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}$, alors on a l'équivalence suivante :

$$T(\omega) = a+k \iff S_{a+k-1}(\omega) = a-1 \quad \text{et} \quad X_{a+k}(\omega) = 1.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(T = a+k) = \binom{a+k-1}{a-1} p^a (1-p)^k.$$

(4) Déduire de (2) et (3) qu'on a $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{a-1} (1-p)^k = \frac{1}{p^a}$; puis retrouver cette formule en dérivant le développement en série entière de $f(x) := \frac{1}{1-x}$.

(5) On suppose que $a \geqslant 2$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{a-1}{T-1}\right) = p$.

Exercice 2. Dans tout l'exercice, on fixe une suite $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de va indépendantes et suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par les ξ_i. On rappelle (et on ne demande pas de redémontrer) qu'on a $\mathcal{E} \subseteq L^p$ pour tout $p < \infty$. Enfin, on fixe un nombre réel $p \geqslant 2$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *sur l'espace $\mathcal{E}$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.*

(1) Comparer $\|Z\|_2$ et $\|Z\|_p$ pour toute va $Z \in \mathcal{E}$.

(2) Soit $Z = \sum_{i\in I} a_i \xi_i \in \mathcal{E}$, où $I \subseteq \mathbb{N}$ est fini. Calculer $\|Z\|_2^2$ en fonction des a_i.

(3) Soit $Z = \sum_{i\in I} a_i \xi_i \in \mathcal{E}$.

(a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Z}\right) = e^{\frac{\lambda^2}{2}\sum\limits_{i\in I} a_i^2} = \mathbb{E}\left(e^{-\lambda Z}\right).$$

(b) En déduire que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}\big(|Z| > t\big) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i\in I} a_i^2}\right).$$

(4) En utilisant (2) et (3), montrer que si $Z \in \mathcal{E}$ vérifie $\|Z\|_2 = 1$, alors $\|Z\|_p \leqslant B_p$, où B_p est une constante finie dépendant uniquement de p.

(5) Conclure.