Devoir de vacances

Exercice 1. On rappelle qu'une va réelle X suit une **loi gamma de paramètres** (α, λ), où $\alpha, \lambda > 0$, si

$$\mathbb{P}_X = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

(1) Soit X une va suivant une loi gamma de paramètres (α, λ).

(a) Montrer que $\varphi_X(z) := \mathbb{E}(e^{izX})$ a un sens pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathrm{Im}(z) > -\lambda$, et que la fonction φ_X est holomorphe sur le demi-plan $U := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) > -\lambda\}$.

(b) Calculer $\varphi_X(iy)$ pour nombre réel $y > -\lambda$.

(c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}\ :\ \varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha$, en précisant soigneusement le sens de cette formule.

(2) Déduire de (1) que si X et X' sont deux va indépendantes suivant des lois gamma de paramètres (α, λ) et (α', λ), alors $X + X'$ suit une loi gamma de paramètres $(\alpha + \alpha', \lambda)$.

Exercice 2. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur $[\![0, 9]\!] = \{0, 1, \ldots, 9\}$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{10^k} \cdot$$

(1) Justifier la définition de X.

(2) Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{10^k} \cdot$ Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}\ :\ \varphi_{S_n}(t) = \frac{1}{10^n} \frac{1 - e^{it}}{1 - e^{i\frac{t}{10^n}}} \cdot$$

(3) Calculer $\varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

(4) Montrer que X est uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Exercice 3. Soit X une va réelle à densité, $\mathbb{P}_X = \rho(x)dx$. On suppose de plus que ρ est une fonction *paire*, et que $X \in L^4$. Soit également $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes de lois $\mathbb{P}_{X_k} = \rho_k(x)dx$, où $\rho_k(x) := \frac{1}{a_k}\rho\big(\frac{x}{a_k}\big)$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^4 = o\left(\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^2\right) \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad \sigma_n := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{\sigma_n}$ converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(1) Pour $n \geqslant 1$, exprimer la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sigma_n}$ à l'aide de φ_X, de σ_n et de $a_1, \ldots, a_n$.

(2) Montrer que φ_X est une fonction paire et à valeurs réelles, et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_X(u) \in [1/2, 3/2]$ pour tout $u \in [-\delta, \delta]$.

(3) Montrer que pour $u \in [-\delta, \delta]$, on peut écrire

$$\log\big(\varphi_X(u)\big) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \eta(u),$$

où $\sigma^2 := \sigma^2(X)$ et $\eta(u) \leqslant C\, u^4$ pour une certaine constante C indépendante de u.

(4) Pour $n \geqslant 1$, exprimer σ_n^2 en fonction de σ^2 et $a_1, \ldots, a_n$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.