DS du 13 Février 2019

Tous les variables aléatoires sont supposées définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$

Questions de cours.

(1) Montrer que si E et F sont des évènements indépendants, alors E^c et F^c sont indépendants.
(2) Soient X et Y deux va à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall i, j \in \mathbb{N} \,:\, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$.
(3) Soit $\alpha > 0$, et soit X une va réelle de loi $\mathbb{P}_X = \alpha x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)dx$. Déterminer la loi de $Y = -\alpha\log(X)$.

Exercice 1. Un renard souhaite offrir un lapin canadien à sa fille pour son anniversaire, et décide d'aller voler ce lapin chez l'éleveur voisin. L'éleveur possède 4000 lapins australiens, 3000 lapins belges et n lapins canadiens. Le renard est incapable de reconnaitre si un lapin est australien, belge ou canadien. Cependant, il a lu dans une revue spécialisée que selon leur origine, les lapins ont des préférences alimentaires très marquées : 99% des lapins canadiens adorent les dragibus noirs et détestent les dragibus rouges, tandis que 97% des lapins australiens et 95% des lapins belges adorent les dragibus rouges et détestent les dragibus noirs. De plus, tout lapin adore les dragibus noirs et déteste les dragibus rouges, ou bien adore les dragibus rouges et déteste les dragibus noirs. Le renard pénètre dans l'enclos des lapins, attrape un lapin au hasard, et lui propose 1 dragibus rouge et 1 dragibus noir. Le lapin mange le dragibus noir et ne touche pas au dragibus rouge. Convaincu qu'il s'agit d'un lapin canadien, le renard l'emmène pour l'offrir à sa fille. Déterminer, en fonction de n, la probabilité que la fille du renard soit contente de son cadeau, et préciser pour quelles valeurs de n cette probabilité est supérieure à 90% (On précise que la petite renarde n'aime que les lapins canadiens et sait parfaitement reconnaitre si un lapin est canadien ou non.)

Exercice 2. Soient X et Y sont des va réelles indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$ et $\mathcal{N}(0, \beta^2)$. Déterminer la loi de $Z = (X + Y, \beta^2 X - \alpha^2 Y)$, et en déduire que $X + Y$ et $\beta^2 X - \alpha^2 Y$ sont indépendantes et que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Exercice 3. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Soit également N une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, et on pose aussi $S_0 = 0$. Enfin, on définit $S_N : \Omega \to \mathbb{N}$ par

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que S_N est une va, puis montrer que S_N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.