Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\alpha(x) > 0$ pp. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-n^{\alpha(x)} \sin^2 x} f(x)\, dx$.

Exercice 2. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dx$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx$.

Exercice 3. Donner un exemple d'une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *décroissant* vers 0 pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \neq 0$.

Exercice 4. Calculer $\int_0^1 x^n \log x\, dx$ pour tout entier $n \geq 1$, et en déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}\, dx = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\cdot$$

Exercice 5. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 \frac{(x \log x)^2}{1+x^2}\, dx = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^3}\cdot$$

Exercice 6. En appliquant le théorème d'interversion série-intégrale aux fonctions $u_k : [0,1[\to \mathbb{R}$ définies par $u_k(x) = (-1)^k x^{2k}(1-x)$, établir la formule

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}\cdot$$

Exercice 7. Montrer que pour tous $p, q > 0$, on a

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{p+kq}\cdot$$

En déduire que si $0 < p < 1$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{p} - 2p \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2 - p^2}\cdot$$

Exercice 8. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{a}{n^2+a^2}\cdot$

Exercice 9. Montrer qu'on a $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\cdot$

Exercice 10. En considérant $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^n e^{i(k+1)\theta}x^k$, montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos k\theta}{k} = -\log\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| .$$

Exercice 11. Dans cet exercice, on calcule $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\sin(kx)}{k}$ et $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{\cos(kx)}{k^2}$ pour $x \in [0, \pi]$.

(1) Calculer $\sum\limits_{k=0}^n \cos kx$ pour $0 < x \leq \pi$, et en déduire que

$$\forall x \in [0,\pi] \ : \ \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} = \int_0^{x/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt.$$

(2) On pose $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ pour $0 < t < \pi$.
   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi[$.
   (b) En intégrant par parties, montrer que $\varphi_k(x) := \int_0^{x/2} g(t)\,\sin(kt)\,dt$ tend vers 0 uniformément sur $[0, \pi]$ quand $k \to \infty$.

(3) On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe et vaut $\frac{\pi}{2}\cdot$ Déduire de (1) et (2) que pour tout $x \in]0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}\cdot$$

(4) En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (s_n) définie par $s_n(t) = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}$, montrer pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos(kx)}{k^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{2}x + \frac{x^2}{4}\cdot$$

(5) En utilisant (4) pour une valeur bien choisie de x, déterminer la valeur de la somme $S = \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\cdot$

Exercice 12. Calculer l'intégrale $I_k := \int_0^1 (-t\,\log(t))^k\,dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en commençant par poser $u = -\log(t)$. En déduire la formule

$$\int_0^1 t^{-t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}\,.$$

Exercice 13. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_k := \int_{\mathbb{R}} t^k e^{-t^2/2} dt$. (On admet que $I_0 = \sqrt{2\pi}$.) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

Exercice 14. Soit $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$, pour $x > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que $f(x) = \sum_1^\infty f_n(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
(2) Montrer que f et les f_n sont intégrables sur $]0, \infty[$.
(3) Calculer $\int_0^\infty f(x)\,dx$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\int_0^\infty f_n(x)\,dx\big)$. Expliquer.

Exercice 15. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

(1) On suppose que f possède une limite à gauche en 1. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1^-).$$
(2) On suppose que f possède une limite à droite en 0. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2}\, f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} f(0^+).$$

Exercice 16. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $[0, \infty[$. Soient également (α_n) et (β_n) deux suites de nombres réels strictement positifs. On suppose que $\alpha_n \to \infty$ et que β_n admet une limite $\beta \in]0, \infty[$ quand $n \to \infty$. Déterminer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\alpha_n} f(\beta_n t)\,dt$.

Exercice 17. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de la série $\sum \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f(nx)}{n^\alpha}\right| dx$, puis montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n^\alpha} = 0$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, et soit (λ_n) une suite de nombres réels positifs vérifiant $\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n\to\infty} f(\lambda_n x) = 0$. (On pourra considérer la série $\sum |f_n|$, où $f_n(x) = f(\lambda_n x)$.)

Exercice 19. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. On suppose que la fonction F' est bornée (*mais pas nécessairement continue*). En considérant les fonctions f_n définies par $f_n(x) = n\big(F(x+\frac{1}{n}) - F(x)\big)$, montrer que la fonction F' est borélienne et que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$.

Exercice 20. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose également qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \int_\Omega |f_n|\, d\mu \leq C$. Montrer que la fonction f est intégrable sur Ω.

Exercice 21. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose que la suite (f_n) converge presque partout vers une fonction *intégrable* $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

(1) Montrer qu'on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big[|f_n - f| - (|f_n| - |f|) \Big]\, d\mu = 0\,.$$

(2) En déduire que si $\int_\Omega |f_n|\, d\mu$ tend vers $\int_\Omega |f|\, d\mu$ quand n tend vers l'infini, alors $\int_\Omega |f_n - f|\, d\mu$ tend vers 0.

Exercice 22. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. On suppose qu'on a $0 < \int_\Omega f\, d\mu < \infty$. Pour $\alpha > 0$, déterminer
$$\lim_{n\to\infty} n \int_\Omega \log\left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] d\mu(x)\,.$$
On aura à distinguer 3 cas : $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$. Dans le troisième cas, on pourra utiliser l'inégalité $1 + u^\alpha \leq (1+u)^\alpha$, après l'avoir démontrée.

Exercice 23. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Toutes les fonctions sur Ω considérées sont mesurables et à valeurs complexes. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge **en mesure** vers une fonction f si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0\,.$$

(1) Montrer qu'une suite (f_n) converge en mesure vers une fonction f si et seulement si
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \min(1, |f_n - f|)\, d\mu = 0\,.$$

(2) En déduire que si une suite (f_n) converge presque partout, alors elle converge en mesure.

Exercice 24. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a

$$\sup_{n\geq 0} \left| \int_0^1 g(t)\, e^{nt}\, dt \right| < \infty.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $g = 0$.

(1) Soit f une fonction intégrable sur $[0,1]$, et soit $x \in]0,1[$.

(a) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a le droit d'écrire

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, e^{kn(x-t)} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{kn(x-t)} f(t)\, dt\,.$$

(b) En déduire qu'on a

$$\int_0^x f(t)\, dt = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^1 e^{kn(x-t)} f(t)\, dt\,.$$

(2) En appliquant (1) à $f(t) = g(1-t)$, montrer qu'on a $\int_{1-x}^1 g(t)\, dt = 0$ pour tout $x \in [0,1[$.

(3) Conclure.

Exercice 25. (sommes de Riemann)

Dans tout l'exercice, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\,.$$

(1) On suppose que f est bornée et que l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure (de Lebesgue) nulle. Montrer que $R_n(f) \to \int_a^b f(t)\, dt$ quand $n \to \infty$.

(2) Montrer que si f est lipschitzienne, alors

$$R_n(f) - \int_a^b f(t)\, dt = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

(3) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'on a

$$\int_a^b f(t)\, dt - R_n(f) = \frac{b-a}{2n}\,(f(b) - f(a)) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(4) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Déterminer deux constantes α, β telles que

$$\int_a^b f(t)\, dt - R_n(f) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 26. Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est bornée, et qu'elle est **séparément intégrable au sens de Riemann**, ce qui signifie ceci : pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[c,d]$, et pour tout $y \in [c,d]$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Le but de l'exercice est de montrer que les fonctions $x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)dx$ sont intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement, et qu'on a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

(1) Montrer que pour tout $y \in [c,d]$, on a

$$\int_a^b f(x,y)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}, y\Big);$$

et en déduire que la fonction $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\, dx$ est λ_1-intégrable au sens de Lebesgue sur $[c,d]$.

(2) Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_c^d f(x,y)\, dy$.

 (a) Pour toute toute fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ et pour toute "subdivision pointée" $\sigma = \big((I_0, x_0), \ldots, (I_{N-1}, x_{N-1})\big)$ de l'intervalle $[a,b]$, on note $R(h,\sigma)$ la somme de Riemann pour h associée à σ :

$$R(h,\sigma) = \sum_{k=0}^{N-1} h(x_k)\, |I_k| = \sum_{(I,x)\in\sigma} h(x)\, |I|.$$

 Vérifier que

$$R(F,\sigma) = \int_{[c,d]} R(f_y,\sigma)\, d\lambda_1(y),$$

 où f_y est la fonction $x \mapsto f(x,y)$.

 (b) En déduire que si $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de subdivisions pointées de $[a,b]$ dont le "pas" tend vers 0, alors

$$R(F,\sigma_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_{[c,d]} \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) d\lambda_1(y).$$

(3) Démontrer le résultat souhaité.