Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^\alpha}\right)^t$ est intégrable sur $]1, \infty[$.

Exercice 2. Soit $a > 0$, et soit $u : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $u(t)/\log(t)$ admet une limite $l > 1$ quand $t \to \infty$ (la valeur $l = \infty$ n'est pas exclue). Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-u(t)}$ est intégrable sur $[a, \infty[$.

Exercice 3. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $[0, \infty[$.

(1) Peut-on affirmer que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$?
(2) Montrer que si $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$, alors cette limite est nécessairement égale à 0.
(3) Montrer que si f est *uniformément* continue, alors $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Exercice 4. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si la fonction f' est intégrable sur $[0, \infty[$, alors $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}\cdot$ (*Décomposer en éléments simples.*)

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, et soit $\lambda = a + ib$.

(1) Déterminer les primitives de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-\lambda}\cdot$
(2) En déduire qu'en notant $\operatorname{sgn}(b)$ le signe de b, on a

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x - \lambda} = i\pi \operatorname{sgn}(b).$$

Exercice 7. (Formule des résidus)
Dans tout l'exercice, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, où les polynômes P et Q sont à coefficients réels. On suppose que Q n'a pas de racines réelles, et que $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$. On suppose également que toutes les racines complexes de Q sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est égal à 1.

(1) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les racines complexes de Q à partie imaginaire strictement positive.

(a) Justifier qu'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{x-\lambda_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\overline{c_j}}{x-\overline{\lambda_j}}\,,$$

où les c_j sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients c_j sont donnés par $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$.

(c) Montrer également qu'on a $\sum_{j=1}^{N} c_j + \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} = 0$.

(3) Avec les notations de (2), et en utilisant l'Exercice 6, établir la **formule des résidus** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}.$$

(4) *Application numérique :* calculer $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\,dt$.

(1) Justifier que I a bien un sens.

(2) En remarquant que $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$, montrer qu'on a $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\,dt$.

(3) En déduire que $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t \sin t)\,dt$, puis que

$$I = -\frac{\pi}{2}\log(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2t)\,dt\,.$$

(4) Montrer qu'on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin u)\,du = I$, puis que $\int_0^{\pi} \log(\sin u)\,du = 2I$.

(5) calculer I.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, et soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$, et que $G(x) := \int_a^x g(t)\,dt$ est *borné* sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b f(t) g(\lambda\phi(t))\,dt = 0\,.$$

(*Suggestion* : écrire $f(t)g(\lambda\phi(t)) = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times g(\lambda\phi(t))\phi'(t)$.)

Exercice 10. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sin(t^{1/4})e^{-t^{1/4}}$.

(1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $[0,\infty[$. Dans la suite, on pose $I_p = \int_0^\infty t^p f(t)\,dt$.

(2) Montrer que I_p est la partie imaginaire de $J_p = 4\int_0^\infty u^{4p+3}e^{-\lambda u}du$, où $\lambda = 1-i$.

(3) Calculer I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\, dt$.

Exercice 12. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\widehat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la **transformée de Fourier** de u, qui est la fonction définie par

$$\widehat{u}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue identiquement nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
  (a) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\, \widehat{f}(\lambda)$.
  (b) Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, exprimer $\widehat{f^{(k)}}(\lambda)$ en fonction de $\widehat{f}(\lambda)$.
  (c) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Pour $x > 0$, on pose $R(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$.
(1) Justifier que $R(x)$ est bien un vrai nombre, i.e. $R(x) < \infty$.
(2) Montrer qu'on a $R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$.
(3) En déduire que $R(x)$ est équivalent à $\phi(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 15. En utilisant une méthode semblable à celle de l'Exercice 14, trouver des équivalents simples de $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ et $g(x) = \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ et $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$.
(1) Calculer $F_1(x)$.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2nF_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x).$$

(3) En déduire $F_2(x)$ et $F_3(x)$.

Exercice 17. Calculer $F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ en posant $t = \tan u$.

Exercice 18. Soit $\beta > 0$. Calculer l'intégrale $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$.

Exercice 19. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}\cdot$ Montrer que si $2\beta - \alpha = 2$, alors $\int_{]0,1]} f = \int_{[1,\infty[} f$.

Exercice 20. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\cdot$

Exercice 21. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\, dt$ en posant $u = \cos t$, et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2+\sin t}$ en posant $u = \tan(t/2)$.

Exercice 22. Déterminer les primitives de $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ sur $]0,\pi[$ en posant $u = \tan(x/2)$.

Exercice 23. Soit $a > 0$. On pose $J(a) = \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-a(t+\frac{1}{t})}dt$.

(1) Montrer que $J(a) = \int_1^\infty (t^{-1/2} + t^{-3/2})\, e^{-a(t+\frac{1}{t})}dt$.

(2) Déterminer la valeur de $J(a)$ en posant $u = \sqrt{a}\big(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\big)$ et en admettant que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 24. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne ou bien positive, ou bien intégrable sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^*} f\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Exercice 25. Montrer que si $u : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini, alors $\int_a^\infty u(t)e^{it}dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Exercice 26. Montrer qu'on a $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t}\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

Exercice 27. Montrer que $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$ en utilisant l'inégalité $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

Exercice 28. Montrer que $\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée, mais que la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $[0,\infty[$. (*Poser* $t = x^2$.)

Exercice 29. Pour $\alpha \in]0,1]$, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 30. Pour $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ en comparant avec une intégrale.

Exercice 31. (Comparaison série-intégrale, cas complexe)
Soit $a \in \mathbb{N}$ et soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{C}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\int_a^\infty |f'(t)|\, dt < \infty$, et que $f(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum f(k)$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\int_a^\infty f(t)\, dt$ est convergente.

(1) Montrer que l'intégrale $\int_a^\infty f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^n f(t)\, dt$ a une limite dans $\mathbb{C}$ quand l'*entier* $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini.
(2) Pour $k \geq a$ entier, on pose $v_k := \int_k^{k+1} f(t)\, dt - f(k)$.
  (a) En utilisant la formule de Taylor, montrer que $v_k = \int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t)\, dt$.
  (b) Montrer que $|v_k| \leq \int_k^{k+1} |f'(t)|\, dt$ pour tout k, puis que la série $\sum v_k$ est convergente.
(3) Déduire de (2) que $u_n := \int_a^n f(t)\, dt - \sum_{k=a}^{n-1} f(k)$ admet une limite quand $n \to \infty$.
(4) Conclure.

Exercice 32. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ en comparant avec des intégrales.

Exercice 33. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$. Les W_n sont appelées les **intégrales de Wallis**.

(1) Montrer qu'on a $W_{n+2} = W_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x\, (\sin x)^n]\, \cos x\, dx$, et en déduire la relation de récurrence
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n\,.$$
(2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,.$$
(3) Montrer que la suite (W_n) est décroissante, puis que $W_{n+1} \sim W_n$ quand $n \to \infty$. Déterminer ensuite un équivalent simple de $W_{2k} W_{2k+1}$ en utilisant (2), et conclure que
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Exercice 34. Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $n!$ quand $n \to \infty$:

$$n! \sim n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \log\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)$. Montrer qu'on a

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

et en déduire que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente.

(2) Déduire de (1) qu'il existe une constante C telle que $n! \sim C\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

(3) Déterminer la contante C en utilisant les intégrales de Wallis (Exercice 33) et conclure.

Exercice 35. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

(1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, k[$, on peut écrire

$$\log\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) = -\frac{t^2}{k^2} - \varepsilon_k(t), \qquad \text{où} \quad 0 \le \varepsilon_k(t) \le \frac{t^4}{2(k^2 - t^2)^2}.$$

(2) En déduire que

$$I = \lim_{k\to\infty} J_k, \qquad \text{où} \quad J_k = \int_0^k \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)^{k^2}.$$

(3) Vérifier que $J_k = k\, W_{2k^2+1}$ où les W_n sont les intégrales de Wallis, puis calculer I en utilisant l'Exercice 33.

Exercice 36. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^k\, dt$ et $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, (\cos t)^k\, dt$. En utilisant des intégrations par parties, montrer que si $k \ge 2$, alors

$$W_k = \frac{k(k-1)}{2}\, I_{k-2} - \frac{k^2}{2}\, I_k \qquad \text{et} \qquad W_k = \frac{k-1}{k}\, W_{k-2}.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = \frac{I_{2n}}{W_{2n}}$.

(a) Montrer à l'aide de (1) que si $n \ge 1$, alors $\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \frac{1}{2n^2}$.

(b) Montrer que ε_n tend vers 0 quand $n \to \infty$. (*Suggestion* : commencer par montrer que pour tout $0 < \delta < \pi/2$ fixé, on a $\int_\delta^{\pi/2} (\cos t)^k\, dt = o(W_k)$ quand $k \to \infty$.)

(3) Déterminer la valeur de S.