

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. (inclusion-exclusion)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soient $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{B}$. Justifier l'identité $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^N A_j} = \mathbf{1} - \prod_{j=1}^N (\mathbf{1} - \mathbf{1}_{A_j})$, et en déduire la formule

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \mu(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) \right).$$

Exercice 2. (intégrale et aire sous le graphe)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour toute fonction borélienne $f : I \rightarrow [0, \infty]$, on pose

$$\text{SG}(f, I) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq y < f(x)\}.$$

- (1) Montrer que $\text{SG}(f, I)$ est un borélien de \mathbb{R}^2 , pour toute fonction borélienne positive f .
- (2) Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction étagée positive. On écrit $\varphi = \sum_{j=1}^N \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$, où les A_j sont deux-à-deux disjoints. Calculer $\lambda_2(\text{SG}(\varphi, I))$ en fonction des α_j et des mesures de Lebesgue $\lambda_1(A_j)$.
- (3) Montrer que pour toute fonction borélienne $f : I \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_I f d\lambda_1 = \lambda_2(\text{SG}(f, I)).$$

Exercice 3. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures sur un espace mesurable (Ω, \mathfrak{B}) , et soit $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$ (i.e. μ est la mesure définie par $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$). Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a $\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i \in I} \int_{\Omega} f d\mu_i$.

Exercice 4. (intégration par rapport à une mesure discrète)

Que devient la formule de l'Exercice 3 lorsqu'on prend $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu_i = a_i \delta_{x_i}$, où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels positifs et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de Ω ?

Exercice 5. (intégration par rapport à une mesure à densité)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit w une fonction mesurable positive sur Ω . On note ν la mesure de densité w par rapport à μ :

$$\nu(A) = \int_A w d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}.$$

Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_{\Omega} f d\nu = \int_{\Omega} fw d\mu.$$

Exercice 6. Déterminer la limite de $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ quand s tend vers 1^+ .

Exercice 7. Déterminer la limite de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2x}$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) = 1$. Soient également $m, M \in \mathbb{R}$ avec $0 < m \leq M$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \Omega$.

(1) En observant que la fonction $\phi = \frac{(f-m)(M-f)}{f}$ est positive, établir l'inégalité

$$\int_{\Omega} f d\mu + mM \int_{\Omega} \frac{1}{f} d\mu \leq m + M.$$

(2) Vérifier que pour tous $a, u \in \mathbb{R}$, on a $au - u^2 \leq \frac{a^2}{4}$.

(3) Dédire des questions précédentes l'inégalité

$$\left(\int_{\Omega} f d\mu \right) \left(\int_{\Omega} \frac{1}{f} d\mu \right) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}.$$

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs complexes. On suppose qu'on a $\sum_0^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| d\mu < \infty$. Montrer que pour presque tout $x \in \Omega$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $(B_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ et $\sum_{i \in I} \int_{B_i} |f| d\mu < \infty$. Montrer que la fonction f est intégrable.

Exercice 11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie comme suit : $f(x) \equiv a_n$ sur $x \in [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f est borélienne, puis calculer $\int_{[0, \infty[} f d\lambda_1$ en fonction des a_n .

Exercice 12. (Borel-Cantelli)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathfrak{B} . On suppose qu'on a $\sum_1^\infty \mu(A_n) < \infty$. Montrer que la fonction $f = \sum_0^\infty \mathbf{1}_{A_n}$ vérifie $f(x) < \infty$ pp, et en déduire que $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$. (On rappelle que $\overline{\lim} A_n$ est l'ensemble des $x \in \Omega$ appartenant à une infinité d'ensembles A_n .)

Exercice 13. (inégalité de Hölder)

Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- (1) En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que pour tous $a, b \in [0, \infty]$, on a

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

- (2) En déduire que si $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré, alors, pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\int_{\Omega} fg \, d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**; et pour $p = 2 = q$, elle s'appelle plutôt **inégalité de Cauchy-Schwarz**.)

- (3) Comment s'écrit l'inégalité de Hölder lorsque $\Omega = \{1, \dots, d\}$ avec la mesure de comptage?

Exercice 14. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Soient également p et q des nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On suppose que les séries $\sum |x_n|^p$ et $\sum |y_n|^q$ sont convergentes. Montrer que la série $\sum x_n y_n$ est absolument convergente.

Exercice 15. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Soit également $p \geq 1$. Montrer que si $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ est une fonction mesurable telle que $\int_{\Omega} f^p \, d\mu < \infty$, alors $\int_{\Omega} f \, d\mu < \infty$. Montrer également que si $\mu(\Omega) = 1$, alors $\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^p \, d\mu \right)^{1/p}$.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable.

- (1) Montrer qu'il existe un nombre complexe ω tel que $|\omega| = 1$ et

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| = \omega \int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\omega f) \, d\mu.$$

- (2) Montrer qu'on a $\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| = \int_{\Omega} |f| \, d\mu$ si et seulement si il existe une constante λ telle que $|\lambda| = 1$ et $f(x) = \lambda |f(x)|$ presque partout.

Exercice 17. Soit $\lambda > 0$, et soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$ définie par

$$\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \delta_k.$$

- (1) Calculer $\mu(\mathbb{R}^+)$.
- (2) Montrer qu'on a $\int_{\mathbb{R}^+} x d\mu(x) = \lambda$ et $\int_{\mathbb{R}^+} x^2 d\mu(x) = \lambda + \lambda^2$.
- (3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est intégrable par rapport à μ , puis calculer $\int_{\mathbb{R}^+} e^{itx} d\mu(x)$.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω , à valeurs complexes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \{x \in \Omega; |f(x)| \geq n\}.$$

- (1) Déterminer $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
- (2) En considérant la mesure ν définie par $\nu(A) := \int_A |f| d\mu$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} |f| d\mu$.
- (3) En déduire que $\mu(A_n) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (4) Dans cette question, on suppose que la fonction f est bornée et que la mesure μ est finie. Montrer qu'on a $\int_{\Omega} e^{|f|} d\mu < \infty$, et en déduire que $\mu(A_n) = O(e^{-n})$.
- (5) On revient au cas général (μ quelconque et f intégrable).
 - (a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_p = \{x \in \Omega; p \leq |f(x)| < p+1\}$. Montrer qu'on a $\sum_{p=1}^{\infty} p \mu(B_p) < \infty$.
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mu(A_n)$ à l'aide des $\mu(B_p)$, $p \geq n$.
 - (c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ est convergente.

Exercice 19. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω , à valeurs complexes.

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{x \in \Omega; \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$.
 - (a) Vérifier que la suite (A_n) est croissante, et déterminer $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
 - (b) En considérant la mesure ν définie par $\nu(A) := \int_A |f| d\mu$, en déduire la limite de $\int_{\Omega \setminus A_n} |f| d\mu$ quand $n \rightarrow \infty$.
 - (c) Montrer que pour tout ensemble mesurable $B \subset \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_B |f| d\mu \leq n \mu(B) + \int_{\Omega \setminus A_n} |f| d\mu.$$

- (2) En utilisant (1), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall B \in \mathfrak{B} : \mu(B) < \delta \implies \int_B |f| d\mu < \varepsilon.$$

- (3) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Montrer que la fonction F est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 20. Dans tout l'exercice $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

- (1) Soit f une fonction *étagée* positive sur Ω , qu'on écrit

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et des A_i mesurables et deux à deux disjoints. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mu(\{f > t\}) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \mathbf{1}_{[0, \alpha_i[}(t).$$

- (2) Soit $\phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , positive et vérifiant $\phi(0) = 0$. Montrer que toute fonction mesurable positive f sur Ω , on a

$$\int_{\Omega} \phi(f(x)) d\mu(x) = \int_0^{\infty} \phi'(t) \mu(\{f > t\}) dt.$$

(Commencer par le cas où la fonction f est étagée.)

- (3) Expliciter la formule précédente lorsque $\phi(t) = t^p$, où $p \geq 1$.

Exercice 21. Dans cet exercice, on donne deux applications de l'Exercice 20.

- (1) Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que dans chacun des deux cas suivants, la fonction g est intégrable sur Ω .
- (i) $\mu(\Omega) < \infty$ et il existe $\alpha > 1$ tel que $\mu(\{|g| > t\}) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \rightarrow \infty$.
 - (ii) g est bornée et il existe $\alpha < 1$ tel que $\mu(\{|g| > t\}) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \rightarrow 0^+$.
- (2) Soit f une fonction mesurable positive sur Ω . On suppose qu'il existe deux constantes $A < \infty$ et $c > 0$ telles que $\forall t > 0 : \mu(\{f \geq t\}) \leq A e^{-ct}$. Montrer qu'on a $\int_{\Omega} f(x)^p d\mu(x) < \infty$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 22. (inégalité de Salem-Zygmund)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$, et soit $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ une fonction mesurable. On pose $I_1(f) = \int_{\Omega} f d\mu$ et $I_2(f) = \int_{\Omega} f^2 d\mu$.

- (1) Soit $\lambda \in]0, 1[$. On pose $A = \{x \in \Omega; f(x) \geq \lambda I_1(f)\}$. En écrivant $\int_{\Omega} = \int_{\Omega \setminus A} + \int_A$, montrer qu'on a

$$I_1(f) \leq \lambda I_1(f) + \int_A f d\mu.$$

- (2) On suppose qu'on a $0 < I_2(f) < \infty$. En utilisant (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a

$$\mu(\{f \geq \lambda I_1(f)\}) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{I_1(f)^2}{I_2(f)}.$$

Exercice 23. (Borel-Cantelli, 2)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit également $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathfrak{B} . On suppose qu'on a $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty$, et que les A_n sont **deux à deux indépendants**, ce qui signifie que $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i)\mu(A_j)$ si $i \neq j$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mu(\overline{\lim} A_n) = 1$.

- (1) Pour $i \geq 1$, on pose $\alpha_i = \mu(A_i)$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad \text{et} \quad P_n = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j.$$

Montrer qu'on a $S_n^2 \geq P_n \geq S_n^2 - S_n$, et en déduire que

$$\frac{P_n}{S_n^2} \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- (2) Montrer que pour toute suite d'ensembles mesurables (B_n) , on a

$$\mu(\overline{\lim} B_n) \geq \overline{\lim} \mu(B_n).$$

- (3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1[$, on pose

$$f_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad B_{n,\lambda} = \{x \in \Omega; f_n(x) \geq \lambda S_n\}.$$

- (a) En utilisant l'Exercice 22, montrer que

$$\mu(B_{n,\lambda}) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{S_n^2}{S_n + P_n}.$$

- (b) En déduire que $\forall \lambda \in]0, 1[: \mu(\overline{\lim} B_{n,\lambda}) \geq (1 - \lambda)^2$.

- (c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$, on a $\overline{\lim} B_{n,\lambda} \subset \overline{\lim} A_n$.

- (4) Conclure.

Exercice 24. (convergence en mesure)

Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur Ω . On dit que la suite (f_n) **tend vers 0 en mesure** si

$$\forall \varepsilon > 0 : \mu(\{f_n \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- (1) Montrer que si $\int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow 0$, alors (f_n) tend vers 0 en mesure.
- (2) Dans cette question, on suppose que la mesure μ est *finie*. Montrer que si $f_n(x) \rightarrow 0$ presque partout, alors (f_n) tend vers 0 en mesure. (Utiliser le fait que $\mu(\{f_n \geq \varepsilon\}) \leq \mu(\bigcup_{k \geq n} \{f_k \geq \varepsilon\})$ pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.)
- (3) Dans cette question, on suppose que la suite (f_n) tend vers 0 en mesure.
 - (a) Montrer que (f_n) possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que

$$\mu(\{f_{n_k} \geq 1/k\}) \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

- (b) Montrer qu'on a $\sum_1^{\infty} \mu(\{f_{n_k} \geq \varepsilon\}) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.
 - (c) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli (*cf* Exercice 12), montrer que la suite (f_{n_k}) converge presque partout vers 0.
- (4) On suppose que la mesure μ est finie. Montrer que la suite (f_n) converge vers 0 en mesure si et seulement si toute sous-suite de (f_n) possède une sous-suite qui tend vers 0 presque partout.