Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. (mesure image)
Soient $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(\Omega', \mathfrak{B}')$ un espace mesurable. Soit également $\phi : \Omega \to \Omega'$ une application mesurable. Montrer qu'on définit une mesure μ_ϕ sur $(\Omega', \mathfrak{B}')$ en posant, pour tout $A \in \mathfrak{B}'$: $\mu_\phi(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$. On dit que μ_ϕ est la **mesure image** de μ par l'application ϕ.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soient $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ des espaces métriques. Soit également $f : \Omega \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$. On écrit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$.

(1) Montrer que si f est mesurable, alors $f_1, \dots, f_d$ sont mesurables.
(2) On suppose que les Ω_j sont séparables. Montrer que f est mesurable si et seulement si $f_1, \dots, f_d$ sont mesurables. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 6 de la Feuille 2.*)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ tel que la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus D$ est continue. Montrer que f est borélienne.

Exercice 4. Montrer qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boréliennes qui ne sont continues en aucun point.

Exercice 5. Soit Ω un ensemble, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω. On note $\mathfrak{B}$ la tribu engendrée par la famille $(A_i)_{i \in I}$.

(1) Montrer que $\mathfrak{B}$ est exactement égale à l'ensemble des $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $A = \bigcup_{i \in J} A_i$, où J est un sous-ensemble de I (dépendant de A).
(2) Montrer qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathfrak{B}$-mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque ensemble A_i.

Exercice 6. Soit Ω un espace métrique, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction arbitraire. On note C_f l'ensemble des points de continuité de f.

(1) Montrer qu'un point $x \in \Omega$ appartient à C_f si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert O de x tel que $\forall u, v \in O$: $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.
(2) Montrer que C_f est un ensemble borélien. Plus précisément, montrer que C_f est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 7. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est **séparément continue** si elle est continue par rapport à chaque variable séparément; autrement dit : pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue, et pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue.

(1) Montrer qu'il existe des fonctions séparément continues qui ne sont pas continues.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continue. On note $\mathcal{I}$ la famille de tous les intervalles fermés $I \subset \mathbb{R}$ à extrémités rationnelles. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence suivante:

$$f(x,y) > \alpha \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \; \exists I \in \mathcal{I} \left(x \in I \text{ et } \forall u \in I \;:\; f(u,y) \geq \alpha + \frac{1}{k} \right).$$

(3) Montrer que toute fonction séparément continue est borélienne.

Exercice 8. Dans tout l'exercice, (Y,d) est un espace métrique.

(1) Soit (y_n) une suite de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$. Montrer que pour tout ouvert $O \subset Y$, on a l'équivalence suivante :

$$y \in O \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall p \geq N \;\; : \; \mathrm{dist}(y_p, Y \setminus O) \geq \frac{1}{k},$$

où, pour $x \in Y$ et $A \subseteq Y$, on note $\mathrm{dist}(x,A)$ la distance de x à A (qui est définie par $\mathrm{dist}(x,A) = \inf \big\{ d(x,u);\ u \in A \big\}$).

(2) Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) est une suite de fonctions mesurables de Ω dans Y. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \Omega \to Y$. Montrer que f est mesurable. (*À toutes fins utiles, on rappelle que pour tout $A \subseteq Y$, la fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ est continue.*)

Exercice 9. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point, alors f' est une fonction borélienne.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans un espace métrique (Y,d). Soit également $b \in Y$. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = b\}$ est mesurable (i.e. $A \in \mathfrak{B}$).

Exercice 11. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans un espace métrique *séparable et complet* (Y,d). On note A l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que la suite $(f_n(x))$ converge dans Y. Montrer que l'ensemble A est mesurable. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 2.*)

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mu\big(\{|f_n| > \varepsilon\}\big)$ est convergente. Montrer que (f_n) tend vers 0 presque partout. (*Utiliser le lemme de Borel-Cantelli – Exercice 17 de la Feuille 2.*)

Exercice 13. (tribu engendrée par une application)
Soit Ω un ensemble, et soit $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$. On pose $\mathfrak{B}_\phi = \{\phi^{-1}(A);\ A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$, où $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\mathfrak{B}_\phi$ est une tribu. Plus précisément, montrer que $\mathfrak{B}_\phi$ est la plus petite tribu sur Ω rendant ϕ mesurable. On dit que $\mathfrak{B}_\phi$ est la **tribu engendrée par** ϕ.
(2) Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne, alors $g \circ \phi$ est $\mathfrak{B}_\phi$-mesurable
(3) Montrer inversement que si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathfrak{B}_\phi$-mesurable, alors il existe une fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \phi$. (*On pourra commencer par le cas où f est une fonction étagée, puis traiter le cas d'une fonction positive, et enfin le cas général.*)

Exercice 14. Avec les notations de l'Exercice 13, on prend $\Omega = \mathbb{R}$ et $\phi(x) = |x|$. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathfrak{B}_\phi$-mesurable si et seulement si elle est borélienne et paire.

Exercice 15. (Théorème de récurrence de Poincaré)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Soit également $T : \Omega \to \Omega$ une application mesurable. On suppose que T **préserve la mesure** μ, ce qui signifie qu'on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$.

(1) Soit $A \in \mathfrak{B}$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose
$$F = \{x \in A;\ \forall n \geq p\ :\ T^n(x) \notin A\}\,,$$
où $T^n = T \circ \cdots \circ T$ est la n-ième itérée de T.
  (a) Justifier que F est mesurable.
  (b) Montrer que les ensembles $(T^{kp})^{-1}(F)$, $k \geq 0$, sont deux à deux disjoints. (*Pour $k < k'$, on pourra écrire $T^{k'p} = T^{(k'-k)p} \circ T^{kp}$*).
  (c) Montrer qu'on a $\mu(F) = 0$.
(2) Soit $A \in \mathfrak{B}$ vérifiant $\mu(A) > 0$. Montrer qu'il existe un point $x \in A$ tel que $T^n(x) \in A$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 16. (Théorème d'Egorov)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit également (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs réelles. On suppose que la suite (f_n) converge *simplement* vers une fonction f. Dans toute la suite, on fixe $\varepsilon > 0$.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$A_n = \left\{ x \in \Omega;\ \forall p \geq n\ :\ |f_p(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$
Justifier que les A_n sont mesurables, puis montrer qu'il existe un entier n_k tel que $\mu(A_{n_k}) > 1 - 2^{-k}\varepsilon$.

(2) Montrer qu'il existe un ensemble $A \in \mathfrak{B}$ tel que $\mu(A) > 1 - \varepsilon$ et tel que la suite (f_n) converge uniformément sur A.

Exercice 17. (Théorème de Lusin)
Soit Ω un espace métrique, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Soit également μ une mesure borélienne sur Ω telle que $\mu(\Omega) = 1$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ et tel que la restriction de f à K_ε est continue.* On aura besoin d'utiliser le fait que la mesure μ est **régulière**, au sens suivant : pour tout borélien $A \subset \Omega$ et pour tout $\eta > 0$, on peut trouver un *fermé* F tel que $F \subset A$ et $\mu(F) > \mu(A) - \eta$. (*Cf l'Exercice 18 de la Feuille 2.*) Dans toute la suite, on fixe $\varepsilon > 0$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi_k(x) = n_k(x)\, 2^{-k}$, où $n_k(x)$ est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\, 2^{-k} \leq f(x) < (n+1)\, 2^{-k}$. Montrer que les fonctions φ_k sont boréliennes, et que la suite (φ_k) converge uniformément vers f.

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $A_{k,n} = \{x \in \Omega;\ n_k(x) = n\}$.
   (a) Combien vaut $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{k,n}\right)$?
   (b) En utilisant la régularité de la mesure μ, montrer qu'il existe un entier $N_k \in \mathbb{N}$ et des fermés $F_{k,-N_k}, \dots, F_{k,N_k}$ tels que $F_{k,n} \subset A_{k,n}$ pour tout $n \in \{-N_k, \dots, N_k\}$ et
$$\mu\left(\bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n} \right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

(3) Avec les notations de (2), on pose $E_k = \bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la restriction de φ_k à E_k est continue.

(4) Démontrer le résultat souhaité en considérant $K_\varepsilon = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$.