Feuille d'exercices n^o 1

Exercice 1. Montrer que si I est un ensemble quelconque, il ne peut pas exister de surjection de I sur $\mathcal{P}(I)$. (*Suggestion : étant donné une application* $\Phi : I \to \mathcal{P}(I)$, *montrer que* $E := \{i \in I;\ i \notin \Phi(i)\}$ *ne peut pas appartenir à* $\Phi(I)$.) Quel résultat en déduit-on lorsque $I = \mathbb{N}$?

Exercice 2. Le but de l'exercice est de donner 4 preuves différentes du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(1) *1ère méthode : segments emboités.*
   (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles compacts non-triviaux telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ x_n \notin I_n$.
   (b) En déduire le résultat.

(2) *2ème méthode : développement décimal.* On rappelle que tout nombre réel $x \in [0, 1[$ admet un unique développement décimal "propre", autrement dit, x peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, 10^{-k}\,,$$

où les $a_k(x)$ sont des entiers compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Utiliser ce fait pour montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de $[0, 1[$ alors on peut construire un réel $x \in [0, 1[$ différent de tous les x_n, et conclure.

(3) *3è méthode : utilisation de* $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $J : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ l'application définie comme suit : si $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors

$$J(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}\,\cdot$$

Montrer que J est injective, et conclure.

(4) *4ème méthode* : démontrer le résultat en 2 lignes en utilisant le théorème de Baire.

Exercice 3. (nombres transcendants)

Un nombre réel x est dit **algébrique** s'il est racine d'une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Un nombre qui n'est pas algébrique est dit **transcendant**. Le but de l'exercice est de montrer qu'*il existe* des nombres transcendants.

(1) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
(2) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et conclure.

Exercice 4. Montrer que si $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ sont des espaces métriques séparables, alors $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ est séparable.

Exercice 5. Soit (Ω, d) un espace métrique séparable. Montrer que toute famille d'ouverts de Ω deux à deux disjoints est dénombrable. (Autrement dit : si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts non vides de Ω et si $O_i \cap O_j = \emptyset$ pour tous i, j tels que $i \neq j$, alors l'ensemble I est nécessairement dénombrable.)

Exercice 6. Montrer que tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Considérer les composantes connexes de O.*)

Exercice 7. Soit Ω un ensemble non dénombrable. On note d la distance discrète sur Ω. Montrer que l'espace métrique (Ω, d) n'est pas séparable.

Exercice 8. On note $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels; autrement dit, de toutes les fonctions bornées $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On munit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

(1) Pour toute partie E de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de E, que l'on considère comme un point de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Calculer $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}'_E\|_\infty$ pour $E, E' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et en déduire que si $E \neq E'$, alors les boules ouvertes $B(\mathbf{1}_E, 1/2)$ et $B(\mathbf{1}_{E'}, 1/2)$ sont disjointes.
(2) Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\ f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\}$, où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont les limites à gauche et à droite de f au point x.
   (a) Montrer que si $x_1, \dots, x_N$ sont des points de D_ε avec $x_1 < \cdots < x_N$, alors
$$N \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \leq \frac{1}{\varepsilon} (f(x_N^+) - f(x_1^-)) .$$
   (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_\varepsilon \cap [-n, n]$ est fini.
   (c) Conclure que D_ε est dénombrable.
(2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 10. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. On écrit $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ et on définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[a_n, \infty[}(x)\,.$$

Montrer que la fonction f est croissante, et que l'ensemble de ses points de discontinuité est exactement égal à D.

Exercice 11. Dans cet exercice, (Ω, d) est un espace métrique.

(1) Soit O un ouvert de Ω, et soit $F = O^c$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a l'équivalence suivante :

$$x \in O \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \ \forall z \in F \ :\ d(x,z) \geq \frac{1}{n}\cdot$$

(2) Montrer que tout ouvert de Ω est réunion dénombrable de fermés.

Exercice 12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres positifs, ou bien deux suites bornées de nombres réels. Établir les inégalités suivantes :

$$\underline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq \underline{\lim}\,(u_n + v_n) \leq \underline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n \leq \overline{\lim}\,(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n\,.$$

Exercice 13. Soit (x_n) une suite de nombres positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha \in [0,1[$ tel que $x_n + \alpha\, x_{2n}$ tend vers 1 quand $n \to \infty$.

(1) On pose $L = \overline{\lim}\, x_n$ et $l = \underline{\lim}\, x_n$. En utilisant l'Exercice 12, montrer qu'on a $1 \leq l + \alpha L$ et $1 \geq L + \alpha l$.
(2) Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 14. Soit Λ un ensemble, et soit $(\Lambda_s)_{s\in S}$ une partition de Λ. Montrer que si $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille de nombres positifs, alors

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{s\in S} \sum_{\lambda\in\Lambda_s} a_\lambda\,.$$

Exercice 15. Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres positifs indexée par un ensemble produit $I \times J$. Montrer à l'aide de l'Exercice 14 qu'on a

$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} a_{ij}\,.$$

Exercice 16. (série produit)
Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs de sommes

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad V = \sum_{l=0}^{\infty} v_l\,.$$

On note (w_n) la suite définie par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

En utilisant l'Exercice 14, montrer qu'on a

$$UV = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_k\, v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Exercice 17. Dans cet exercice, on donne une preuve "inhabituelle" du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde : dans ce qui suit, on suppose donc que $\mathbb{R}$ *est* dénombrable, et on cherche à obtenir une contradiction.

(1) En utilisant l'hypothèse, montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ vérifiant $f(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\sum_{t\in\mathbb{R}} f(t) < \infty$.

(2) On pose

$$x_0 = \sup \left\{ x \in \mathbb{R};\ x < \sum_{t<x} f(t) \right\}.$$

  (a) Montrer que x_0 est un nombre réel bien défini.
  (b) Montrer que $x_0 \leq \sum_{t<x_0} f(t)$.
  (c) Justifier l'existence d'un nombre x tel que $x_0 < x < x_0 + f(x_0)$, et montrer qu'on a $x < \sum_{t<x} f(t)$.

(3) Conclure.

Exercice 18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k\geq 1}\left(e^{1/k} - 1\right)^{1+\frac{1}{n}}$ est convergente; puis déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{1/k} - 1\right)^{1+\frac{1}{n}}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 19. Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k^2}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 20. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions positives définies sur un ensemble I, alors

$$\sum_{i\in I} \underline{\lim}\, f_n(i) \leq \underline{\lim} \sum_{i\in I} f_n(i)\,.$$

Exercice 21. (théorème de convergence dominée pour les séries)
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes :

(a) $f_n(i) \to f(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ quand $n \to \infty$;
(b) Il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}} g(i) < \infty$ et $|f_n(i)| \leq g(i)$ pour tout n et pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que la série $\sum f(i)$ est absolument convergente.
(2) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geq 0\ :\ \left|\sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) - \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\right| \leq \sum_{i=0}^{N} |f_n(i) - f(i)| + 2\sum_{i>N} g(i)\,.$$

(3) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i)\,.$$

Exercice 22. En utilisant la formule du binôme et l'Exercice 21, montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}\ :\ e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Exercice 23. En utilisant l'Exercice 21, montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}\cdot$$

Exercice 24. Soit Ω un ensemble. Montrer que pour tous $A, B \subset \Omega$, on a

$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B\,.$$

Exercice 25. Soit Ω un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω deux à deux disjointes. Exprimer la fonction indicatrice de $\bigcup_{i\in I} A_i$ à l'aide des fonctions indicatrices des A_i.

Exercice 26. Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω, on définit leur **différence symétrique** $A\Delta B$ par $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ et pour tout $x \in \Omega$, on a
$$\mathbf{1}_{A\Delta B}(x) = |(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)(x)| = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x) \pmod 2 .$$
(2) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre, et le symétrique d'un élément $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
(3) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser l'élément unité.

Exercice 27. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω. On note $\overline{\lim}\, A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n, et $\underline{\lim}\, A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. Vérifier qu'on a
$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n .$$

Exercice 28. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω. Montrer qu'on a
$$\mathbf{1}_{\overline{\lim}\, A_n} = \overline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\underline{\lim}\, A_n} = \underline{\lim}\, \mathbf{1}_{A_n} .$$

Exercice 29. Soit Ω un ensemble. On dit qu'une suite (A_n) de parties de Ω est **convergente** si on a $\overline{\lim}\, A_n = \underline{\lim}\, A_n$, et on note alors $\lim A_n$ cet ensemble.
(1) Comment se traduit la convergence d'une suite d'ensembles en termes de fonctions indicatrices?
(2) Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (A_n) est convergente; et si c'est le cas, trouver sa limite.
   (a) La suite (A_n) est croissante.
   (b) La suite (A_n) est décroissante.
   (c) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.