

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $x \in [a, b]$. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on peut trouver $u, v \in [a, b]$ tels que $x = (1 - \lambda)u + \lambda v$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(t) := |at + b|$ est convexe sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow J$ une bijection croissante. Montrer que f est convexe si et seulement si f^{-1} est concave.

Exercice 4. Trouver une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit convexe mais pas continue.

Exercice 5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si elle est convexe sur $]a, b[$.

Exercice 6. Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Exercice 7. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On fixe $x_0 \in I$ et on définit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) := \int_{x_0}^x \varphi(t) dt.$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f est convexe.

- (1) Démontrer le résultat en une ligne dans le cas où la fonction φ est *continue*.
- (2) On ne suppose plus que φ est continue.
 - (a) Soient $u, v \in I$ avec $u < v$; et soit $\lambda \in [0, 1]$. On pose $x_\lambda := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Montrer que

$$f(x_\lambda) - [(1 - \lambda)f(u) + \lambda f(v)] = (1 - \lambda) \int_u^{x_\lambda} \varphi(t) dt - \lambda \int_{x_\lambda}^v \varphi(t) dt.$$

- (b) Avec les notations de (a), calculer $x_\lambda - u$ et $v - x_\lambda$.
- (c) Montrer que f est convexe.

Exercice 8. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est continue, et que

$$\forall x, y \in I : f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est convexe.

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante est vraie :

$$\forall x_1, \dots, x_{2^n} \in I : f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}(f(x_1) + \dots + f(x_{2^n})).$$

(2) Soit \mathbb{D} l'ensemble de tous les nombres $r \in [0, 1]$ de la forme $r = \frac{k}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Dédurre de (1) que si u, v sont deux points quelconques de I , alors

$$\forall r \in \mathbb{D} : f((1-r)u + rv) \leq (1-r)f(u) + rf(v).$$

(3) Montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on peut trouver une suite (r_n) d'éléments de \mathbb{D} telle que $r_n \rightarrow \lambda$.

(4) Montrer que f est convexe.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et non constante. Montrer que le maximum de f sur $[a, b]$ ne peut être atteint qu'en a ou en b .

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

(1) Montrer que s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$, alors $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

(2) Que peut-on dire s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$?

(3) Montrer que si la fonction f est majorée, alors elle est constante.

Exercice 11. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors ou bien f est constante, ou bien $f(x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 12. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ quand $x \rightarrow \infty$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$. Montrer que f est décroissante.

Exercice 14. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave.

(1) Montrer que si $0 \leq h \leq u$, alors $f(u+h) - f(u) \leq f(h) - f(0)$. (Diviser par h lorsque $h > 0$.)

(2) Montrer que si $f(0) \geq 0$, alors f est **sous-additive** :

$$\forall x, y \geq 0 : f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Exercice 15. Soit $\alpha \in]0, 1]$. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$, on a

$$(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

Exercice 16. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est convexe et *dérivable*.

(1) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $a \in I$, on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) tendant vers a avec $x_n < a < y_n$, telles que $f'(x_n) \rightarrow f'(a)$ et $f'(y_n) \rightarrow f'(a)$.

(2) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 17. Montrer que si f et g sont deux fonctions 2 fois dérivables, convexes, positives et toutes les deux croissantes (ou toutes les deux décroissantes) sur un intervalle I , alors fg est convexe.

Exercice 18. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Soit également $t_0 \in I$. Montrer que si $f'(t_0) = 0$, alors f possède un minimum au point t_0 .

Exercice 19. Montrer que $f(t) := |3t - 2| + \max(t^8 + 3t^6 - t + 1, e^{|5t-8|} - 6)$ est convexe sur \mathbb{R} .

Exercice 20. Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $|f|$ est convexe?

Exercice 21. Soient I et $[a, b]$ deux intervalles de \mathbb{R} , et soit $\Phi : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- pour tout $t \in [a, b]$, la fonction $x \mapsto \Phi(t, x)$ est convexe sur I ;
- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \Phi(t, x)$ est intégrable sur $[a, b]$.

Montrer que la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \int_a^b \Phi(t, x) dt$ est convexe.

Exercice 22. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe continue. Montrer que la fonction M définie par $M(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ est convexe sur $]0, \infty[$.

Exercice 23. Soit $\alpha \geq 2$. Montrer que $f(t) := e^{\alpha t - \cos t}$ est convexe sur \mathbb{R} .

Exercice 24. Montrer que $f(t) := (1+t)^t$ est convexe sur son domaine de définition.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. Est-il vrai que f est strictement convexe si et seulement si $f''(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 26. Donner un exemple de fonction convexe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de non-dérivabilité est infini. (On pourra se contenter d'un dessin.)

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Montrer que la fonction g définie par $g(t) := f(t) - tf'(t)$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et décroissante sur \mathbb{R}^- .

Exercice 28. Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. En minorant convenablement $\sin t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)e^{-\lambda \sin t} dt$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 29. Montrer que si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction concave continue telle que $0 \leq \phi(a) < \phi(b)$, alors $\int_a^b e^{-\lambda \phi(t)} dt$ tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 30. Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} (non trivial). Le but de l'exercice est de montrer que pour toute fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

- (1) Montrer que les inégalités sont satisfaites pour toute fonction *affine* $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et que ce sont en fait des égalités dans ce cas.
- (2) Dédire de (1) qu'on a $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ pour toute fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- (3) Montrer qu'on a $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ pour toute fonction convexe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, en considérant la fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.

Exercice 31. Montrer que si $0 < x < 1$, alors $1 + x < e^x < 1 + x(e-1)$.

Exercice 32. Montrer que la fonction $f(t) := \ln(1 + e^t)$ est convexe sur \mathbb{R} , et en déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \in]0, \infty[$, on a

$$1 + \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{1/n}.$$

Montrer ensuite que pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, \infty[$, on a

$$\prod_{i=1}^n a_i^{1/n} + \prod_{i=1}^n b_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^n (a_i + b_i)^{1/n}.$$

Exercice 33. En considérant $f(t) := \ln(\ln t)$, montrer que pour tous $x, y > 1$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 34. En considérant $f(t) := t \ln(t)$, montrer que si $a, b, x, y > 0$, alors

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 35. Soient $p_1, \dots, p_n > 0$ vérifiant $p_1 + \dots + p_n = 1$. Montrer qu'on a

$$\sum_{i=1}^n -p_i \ln(p_i) \leq \ln(n).$$

Exercice 36. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Montrer qu'on a

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Exercice 37. Soit $p > 1$. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n > 0$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^n x_i^p.$$

Exercice 38. Dans tout l'exercice, $[a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} et on note $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On fixe également $p \in]1, \infty[$, et pour $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour toutes $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Minkowski pour les intégrales**.)

- (1) On pose $C := \{u \in \mathcal{C}([a, b]); \|u\|_p \leq 1\}$. Montrer que C est un ensemble convexe; autrement dit, que

$$\forall u, v \in C \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)u + \lambda v \in C.$$

- (2) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et $f \neq 0$, alors $\|f\|_p \neq 0$; puis calculer $\left\|\frac{f}{\|f\|_p}\right\|_p$.

- (3) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ non nulles. On pose $u := \frac{f}{\|f\|_p}$ et $v := \frac{g}{\|g\|_p}$. Montrer qu'on peut écrire

$$\frac{f + g}{\|f\|_p + \|g\|_p} = (1 - \lambda)u + \lambda v,$$

pour un certain $\lambda \in [0, 1]$ à déterminer.

- (4) Démontrer l'inégalité souhaitée.

Exercice 39. Soit $p \in]1, \infty[$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Minkowski pour les sommes**.)

Exercice 40. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **logarithmiquement convexe** si f est strictement positive et si la fonction $\ln f$ est convexe.

- (1) Montrer que toute fonction logarithmiquement convexe est convexe.
- (2) Donner un exemple de fonction qui soit convexe et strictement positive sur $I :=]0, \infty[$, mais pas logarithmiquement convexe.
- (3) Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive est logarithmiquement convexe si et seulement si : pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^\lambda.$$

- (4) Montrer qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive et 2 fois dérivable est logarithmiquement convexe si et seulement si

$$f f'' \geq f'^2.$$

- (5) Montrer que le produit de deux fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.

Exercice 41. Le but de l'exercice est de montrer que si f et g sont des fonctions logarithmiquement convexes et deux fois dérivables sur un intervalle I , alors $f + g$ est logarithmiquement convexe.

- (1) Montrer que pour tous $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$a_0 b_0 ((a_0 + b_0)(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)^2) \geq b_0 (a_0 + b_0)(a_0 a_2 - a_1^2) + a_0 (a_0 + b_0)(b_0 b_2 - b_1^2).$$

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 42. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strictement positive. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on définit $f_c : I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_c(t) = e^{ct} f(t).$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si toutes les fonctions f_c sont convexes.

- (1) Démontrer l'implication "facile".
- (2) Soient $x, y \in I$ avec $x \neq y$, et soit $\lambda \in]0, 1[$. Montrer que si toutes les fonctions f_c sont convexes, alors

$$\forall c \in \mathbb{R} : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) e^{c\lambda(x-y)} f(x) + \lambda e^{c(1-\lambda)(y-x)} f(y).$$

- (3) Soient toujours $x, y \in I$ avec $x \neq y$, et soit $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer la valeur de c pour laquelle $\varphi(c) = (1 - \lambda) e^{c\lambda(x-y)} f(x) + \lambda e^{c(1-\lambda)(y-x)} f(y)$ est minimal, et vérifier que pour cette valeur de c , on a $\varphi(c) = f(x)^{1-\lambda} f(y)^\lambda$.
- (4) Démontrer l'implication "difficile".

Exercice 43. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . En utilisant l'exercice 42, montrer que si f et g sont deux fonctions logarithmiquement convexes sur I , alors $f + g$ est logarithmiquement convexe.