Feuille d'exercices n^o 3

Exercice 1. Soient $a, b > 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$.

Exercice 2. Soient $a, b > 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$ en primitivant 2 fois par parties.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes a, b avec $a \neq b$ telles que $f'' = af$ et $g'' = bg$. Établir la formule

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big) + cte.$$

Exercice 4. Déterminer les primitives de $f(x) := xe^{3x}$ et $g(x) := x^2\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) := (\cos x)^n \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Montrer que si P un polynôme de degré n et si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\int P(x)e^{\lambda x}dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} P^{(k)}(x)e^{\lambda x} + cte.$$

En déduire les primitives de $f(x) := (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ quand $n \to \infty$; autrement dit que

$$\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \to 1 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(1) En utilisant convenablement la relation de Chasles, montrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$\int_1^{n-1} \ln(t)\,dt \leq \ln(n!) \leq \int_2^n \ln(t)\,dt.$$
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 8. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $b = \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels. On suppose que P n'a pas de racines réelles. Calculer $\int \frac{dx}{P(x)}$ et $\int \frac{x}{P(x)}\, dx$ en fonction de a, de b et de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 10. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{2x^5 - x^4 + x^3 - 16x^2 + 17x - 15}{x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6}$ (là où elles existent).

Exercice 11. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{3x+1}{(x+2)^2(x^2+3)(x^2+5)}$ (là où elles existent).

Exercice 12. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$, puis les primitives de $g(x) := \frac{1}{(x^2+2x+5)^3}$ (là où elles existent).

Exercice 13. Montrer que $\int_0^X \frac{dt}{1+t^3}$ admet une limite quand $X \to +\infty$ et déterminer cette limite.

Exercice 14. Le but de l'exercice est de montrer que $I := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}$ existe, et de calculer I.

(1) Pour $R \geq 1$, on pose $\phi(R) := \int_1^R \frac{dx}{x^4+1}$. Montrer que la fonction ϕ est croissante, et qu'on a $\phi(R) \leq \arctan(R) \leq \frac{\pi}{2}$ pour tout $R \geq 1$. En déduire que I existe.

(2) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$, où on suppose que $\Delta = b^2 - 4c$ est < 0.

  (a) Montrer qu'on peut écrire $F(x) = A\,\frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c} + \frac{B}{x^2+bx+c}$, où les constantes A et B sont à déterminer.

  (b) Calculer $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c} dx$.

  (c) Montrer qu'on peut mettre $x^2 + bx + c$ sous la forme $(x+p)^2 + q^2$, où p et q sont à déterminer, puis calculer $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+bx+c}$ en fonction de q.

  (d) Pour tout $R > 0$, calculer $\int_{-R}^{R} F(x)\, dx$ en fonction de R, A, B, p et q.

  (e) Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)\, dx = \pi\, \frac{2\beta - b\alpha}{\sqrt{4c - b^2}} \cdot$$

(3) Trouver des constantes $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ telles que

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\alpha' x + \beta'}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

(4) Calculer I.

Exercice 15. Soient $x, y > 0$ avec $x \neq y$. On définit la **moyenne logarithmique** de x et y par

$$L(x,y) := \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\sqrt{xy} \leq L(x,y) \leq \frac{x+y}{2}.$$

(1) Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
(2) En déduire (en développant les carrés et le produit) que

$$\forall t \geq 0 \ : \ (t+\sqrt{xy})^2 \leq (t+x)(t+y) \leq \left(t+\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

(3) Pour $R > 0$, calculer les intégrales

$$\int_0^R \frac{dt}{\left(t+\frac{x+y}{2}\right)^2} \quad , \quad \int_0^R \frac{dt}{(t+x)(t+y)} \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{dt}{(t+\sqrt{xy})^2}.$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 16. Calculer $I := \int_0^1 (t^2+t+1)e^{3t}dt$ et $J := (3t^2-t+2)\sin(2t)\,dt$.

Exercice 17. Calculer $I := \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, puis $J := \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^3}$.

Exercice 18. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que $I(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda\phi(t)}dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$. (*Intégrer par parties en écrivant* $f(t)e^{-i\lambda\phi(t)} = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times \phi'(t)e^{-i\lambda\phi(t)}$.)

Exercice 19. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N} \ : \ f^{(k)}(a) = 0 = f^{(k)}(b)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \to \pm\infty$.

Exercice 20. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également $\lambda > 0$.

(1) On suppose qu'on a $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a,b]$, et on pose $G = 1/F'$. Montrer que

$$\left|\int_a^b e^{iF(t)}dt\right| \leq \frac{2}{\lambda} + \left|\int_a^b G'(t)e^{iF(t)}dt\right|.$$

(2) On suppose que la fonction F' est monotone, et que $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer qu'on a

$$\left| \int_a^b e^{iF(t)} dt \right| \leq \frac{4}{\lambda}\cdot$$

Exercice 21. Soit $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite de $\int_0^X t^n e^{-t/\lambda} dt$ quand $X \to +\infty$ existe, et déterminer cette limite.

Exercice 22. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}\cdot$

Exercice 23. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\, dt\,.$$

En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, alors

$$\int_a^b P(t)\, dt = \frac{b-a}{2}\,(P(a) + P(b));$$

et interpréter géométriquement ce résultat lorsque $P \geq 0$ sur $[a,b]$.

Exercice 24. Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12}\,(f'(1) - f'(0)) + \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(t^2 - t + \frac{1}{6}\Big)\, f''(t)\, dt\,.$$

En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \frac{1}{2}\,(P(0) + P(1)) - \frac{1}{12}\,(P'(1) - P'(0)).$$

Exercice 25. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$ et $\int_a^b f^2 = 1$. Montrer que $\int_a^b t\, f(t) f'(t) = -\frac{1}{2}\cdot$

Exercice 26. Calculer $I := \int_0^2 x\, \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

Exercice 27. Calculer $I := \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ en posant $x = \tan t$.

Exercice 28. Soit $\alpha > 0$. Calculer $I(\lambda) := \int_1^\lambda \frac{dt}{t(1+t^\alpha)}$ pour tout $\lambda > 0$, en posant $x = t^\alpha$.

Exercice 29. Calculer $I := \int_0^1 \frac{e^{2t}+1}{e^t+1}\, dt$.

Exercice 30. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$.

Exercice 31. Calculer $I(\lambda) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda} \frac{dt}{\sin t}$ pour tout $\lambda \in]0, \pi[$.

Exercice 32. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\, dt$ en posant $x = \cos t$.

Exercice 33. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{(\cos t)(1-\sin t)}$ en posant $x = \sin t$.

Exercice 34. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{1+\tan t}\, dt$ en posant $x = \tan t$.

Exercice 35. Calculer $I := \int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 36. Dans cet exercice, on se donne $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < b < a$.

(1) Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, justifier l'existence des intégrales $I(\theta) := \int_0^\theta \frac{dx}{a+b\sin x}$ et $J(\theta) := \int_0^\theta \frac{dx}{a+b\cos x}$.
(2) Soit θ vérifiant $0 \leq \theta < \pi$, et soit $T = \tan(\theta/2)$. Calculer $I(\theta)$ et $J(\theta)$ en fonction de a, b et T.
(3) Déduire de (2) qu'on a

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

et

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Exercice 37. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I := \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{x}{1+x^4} \arctan(x)\, dx.$$

(1) Montrer que $I = \frac{\pi}{2} \int_\alpha^{1/\alpha} \frac{u}{1+u^4}\, du - I$.
(2) Vérifier que $\frac{u}{1+u^4} = \frac{c}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{c}{u^2+\sqrt{2}u+1}$ pour une certaine constante c.
(3) Calculer I.

Exercice 38. Soit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone. Le but de l'exercice est de montrer que la formule de changement de variable $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$ est valable pour toute fonction f intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $J = \phi([a,b])$. (*La subtilité est que f n'est pas nécessairement continue.*) Dans ce qui suit, on supposera que ϕ est strictement croissante, de sorte que $J = [\phi(a), \phi(b)]$. On rappelle aussi que ϕ est une *bijection* de $[a,b]$ sur J.

(1) Soit u une fonction *en escalier* sur $[\phi(a), \phi(b)]$, et soit $(x_0, \dots, x_N)$ une subdivision de $[\phi(a), \phi(b)]$ adaptée à u, avec $u(x) \equiv \alpha_k$ sur $]x_k, x_{k+1}[$, $0 \le k \le N-1$. Déterminer explicitement $v(t) := u(\phi(t))\phi'(t)$ en introduisant les points $t_k := \phi^{-1}(x_k)$. En déduire que v est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et qu'on a $\int_a^b v(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(x)\,dx$.

(2) Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux suites (v_n) et $(\widetilde{v}_n)$ de fonctions (R)-intégrables sur $[a,b]$ telles que $v_n \le g \le \widetilde{v}_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\widetilde{v}_n - v_n) = 0$. Montrer que g est (R)-intégrable sur $[a,b]$ avec $\int_a^b g = \lim_{n\to\infty} v_n$.

(3) Montrer que si f est une fonction (R)-intégrable sur $[\phi(a), \phi(b)]$, alors la fonction $t \mapsto f(\phi(t))\phi'(t)$ est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et la formule de changement de variable est valable.

Exercice 39. Soit $b > 0$. Montrer par un calcul que si $f : [-b,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction (R)-intégrable et *impaire*, alors $\int_{-b}^b f(t)\,dt = 0$.

Exercice 40. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *périodique* de période $T > 0$. On a donc $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f est (R)-intégrable sur tout intervalle $[u,v] \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que si $[u,v]$ est un intervalle de longueur T, alors $\int_u^v f = \int_0^T f$.

Exercice 41. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt$.

(1) Montrer que $I_n = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^{2n} dt$.

(2) En écrivant que $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et en utilisant la formule du binôme, déterminer la valeur de I_n.

Exercice 42. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réls ≥ 0. Montrer que la série $\sum a_k$ converge si et seulement si il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; \sum_{k=0}^{n} a_k \le M.$$

Exercice 43. Soit $\alpha > 0$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(1) En utilisant convenablement la relation de Chasles, montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 44. Montrer que pour tout nombre réel $u \neq -1$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n u^n = \frac{1}{1+u} + (-1)^N \frac{u^{N+1}}{1+u}.$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)\,.$$

Exercice 45. En raisonnant comme dans l'Exercice 44, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 46. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Exercice 47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe une constante C et une fonction continue $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telles que

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ :\ |f^{(k)}(t)| \leq C^k k!\, \alpha(t)\,.$$

Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right[$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Exercice 48. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f : [0,\varepsilon] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose qu'on a $f'(0) = f''(0) = 0$ et $|f'''(t)| \leq 1 + t^2$ pour tout $t \in [0,\varepsilon]$. Montrer que $|f(\varepsilon) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon^5}{60}$.

Exercice 49. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe des constantes M_0 et M_2 telles que $\forall s \in \mathbb{R}\ :\ |f(s)| \leq M_0$ et $|f''(s)| \leq M_2$.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $h \in \mathbb{R}$, majorer $|f(t+h) - f(t) - hf'(t)|$ à l'aide de M_2, et en déduire que $\forall h > 0\ :\ |f'(t)| \leq \frac{M_2}{2}\, h + 2\, \frac{M_0}{h}$.
(2) Montrer qu'on a $|f'(t)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 50. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(a) = 0 = f'(b)$. On pose $M := \sup\{|f''(t)|;\ t \in [a,b]\}$.

(1) Pour $x \in [a,b]$, majorer $|f(x) - f(a)|$ et $|f(x) - f(b)|$ à l'aide de M.
(2) Montrer qu'on a $|f(b) - f(a)| \leq M\, \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 51. Soit $a > 0$.

(1) Étudier $\varphi(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sur $]0, \infty[$.
(2) Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
(3) Placer x_1, x_2, x_3 sur une figure, puis montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.
(4) Calculer $\varphi'(\sqrt{a})$, puis montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange qu'on a $|\varphi(x) - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\,(x - \sqrt{a})^2$ pour tout $x \geq \sqrt{a}$.
(5) On suppose que $a \geq 1/4$ et $x_0 \geq \sqrt{a}$ Montrer qu'on a $|x_n - \sqrt{a}| \leq (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(6) Dans cette question, on prend $a = 2$ et $x_0 := 3/2$. Comment suffit-il de choisir n pour avoir $|x_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}$? (*Observer que* $\sqrt{2} \geq 1,4$.)

Exercice 52. Soit $a > 0$, et soit k un entier au moins égal à 2.

(1) Étudier $\varphi(x) := \left(1 - \frac{1}{k}\right) x + \frac{a}{kx^{k-1}}$ sur $]0, \infty[$.
(2) Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence
$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}.$$
Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.
(3) En raisonnant comme dans l'Exercice 51 (question (4)), montrer qu'on a
$$|\varphi(x) - a^{1/k}| \leq \frac{k-1}{2}\, a^{-1/k}\,(x - a^{1/k})^2 \qquad \text{pour tout } x \geq a^{1/k}.$$
(4) On pose $c := \frac{k-1}{2}\, a^{-1/k}$. Montrer que si $x_0 \geq a^{1/k}$, alors
$$|x_n - a^{1/k}| \leq \frac{1}{c}\,\big(c(x_0 - a)\big)^{2^n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$