L1 Analyse 2

Feuille d'exercices n° 2

Dans tous les exercices, $[a,b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Soient φ une fonction en escalier sur $[a,b]$, et soit $\widetilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in [a,b];\ \varphi(t) \neq \widetilde{\varphi}(t)\}$ est *fini*. Montrer que $\widetilde{\varphi}$ est en escalier et qu'on a $\int_a^b \varphi = \int_a^b \widetilde{\varphi}$.

Exercice 2. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, alors $\left|\int_a^b \varphi(t)\, dt\right| dt \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$.

Exercice 3. Soient $I,\ J_1, \dots, J_N$ des intervalles bornés de $\mathbb{R}$. On suppose qu'on a $I \subseteq J_1 \cup \cdots \cup J_M$. Montrer que $|I| \leqslant |J_1| + \cdots + |J_M|$. (*Suggestion : choisir un intervalle $[a,b]$ contenant $I, J_1, \dots, J_N$, et considérer les fonctions φ et ψ définies sur $[a,b]$ par $\varphi = \mathbf{1}_I$ et $\psi = \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{J_k}$.*)

Exercice 4. *Montrer* qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $\forall t \in [a,b]\ :\ C_1 \leqslant f(t) \leqslant C_2$.

Exercice 5. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Établir les résultats suivants.

(1) $\overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$ et $\underline{\int_a^b}(f+g) \geqslant \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g$.

(2) $\overline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \overline{\int_a^b} f$ et $\underline{\int_a^b} \lambda f = \lambda \underline{\int_a^b} f$ pour toute constante $\lambda \geqslant 0$.

(3) Si $f \leqslant g$, alors $\overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} g$ et $\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} g$.

Exercice 6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t$. Le but de l'exercice est de montrer, *en utilisant uniquement la définition de l'intégrabilité*, que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$ avec $\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

(1) En utilisant des fonctions en escalier bien choisies, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{\int_a^b} f \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Big(a + k\,\frac{b-a}{N}\Big) \times \frac{b-a}{N} \qquad \text{et} \qquad \overline{\int_a^b} f \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \Big(a + (k+1)\,\frac{b-a}{N}\Big) \times \frac{b-a}{N}.$$

(2) Calculer les deux sommes apparaissant dans (1).
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 7. Soit $b > 1$, et soit $f : [1, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = 1/t$. Le but de l'exercice est de montrer, *en utilisant uniquement la définition de l'intégrabilité*, que f est (R)-intégrable sur $[1, b]$ avec $\int_1^b f(t)\, dt = \ln(b)$.

(1) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\varepsilon_N > 0$ tel que $(1+\varepsilon_N)^N = b$, et exprimer ε_N en fonction de b et N.
(2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des fonctions en escalier bien choisies, montrer qu'on a

$$\overline{\int_1^b} f \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1+\varepsilon_N)^k} \left((1+\varepsilon_N)^{k+1} - (1+\varepsilon_N)^k \right)$$

et

$$\underline{\int_1^b} f \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1+\varepsilon_N)^{k+1}} \left((1+\varepsilon_N)^{k+1} - (1+\varepsilon_N)^k \right).$$

(3) Calculer les deux sommes apparaissant dans (2), d'abord en fonction de ε_N, puis en fonction de b et N.
(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 8. Soit $\lambda > 0$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = e^{\lambda t}$. Le but de l'exercice est de montrer, *en utilisant uniquement la définition de l'intégrabilité*, que f est (R)-intégrable sur $[a, b]$ avec $\int_a^b f(t)\, dt = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda b} - e^{\lambda a})$.

(1) En utilisant des fonctions en escalier bien choisies, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{\int_a^b} f \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda(a+k\frac{b-a}{N})} \times \frac{b-a}{N}$$

et

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} e^{\lambda(a+(k+1)\frac{b-a}{N})} \times \frac{b-a}{N}.$$

(2) Calculer les deux sommes apparaissant dans (1). (*On pourra observer que* $e^{\lambda(a+k\frac{b-a}{N})} = e^{\lambda a}\big(e^{\lambda\frac{b-a}{N}}\big)^k$.)
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 9. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, déterminer *sans faire aucun calcul* les valeurs de $I_1 := \int_1^2 t\, dt$, $I_2 := \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$ et $I_3 := \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\, dt$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{R}([a,b])$, et soit $\widetilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in [a,b];\ \widetilde{f}(t) \neq f(t)\}$ est fini. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\int_a^b \widetilde{f} = \int_a^b f$.

Exercice 11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction (R)-intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier telle que $\int_a^b |f(t) - \varphi(t)|\, dt < \varepsilon$.

Exercice 12. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f est (R)-intégrable sur tout intervalle $[u,v]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Le but de l'exercice est de montrer que f est (R)-intégrable *sur* $[a,b]$.

(1) Soit $\eta > 0$ tel que $a + \eta \leqslant b - \eta$, et soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a+\eta, b-\eta]$. Soit également $M \geqslant 0$. On définit deux fonctions en escalier $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : [a,b] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\widetilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } a+\eta \leqslant t \leqslant b-\eta \\ -M & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\psi}(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{si } a+\eta \leqslant t \leqslant b-\eta \\ M & \text{sinon} \end{cases}$$

Exprimer $\int_a^b (\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi})$ en fonction de $\int_{a+\eta}^{b-\eta} (\psi - \varphi)$, de M et de η.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 13. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité. Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$. (*Utiliser l'exercice 12.*)

Exercice 14. Trouver une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui soit bornée avec un seul point de discontinuité, mais pas réglée.

Exercice 15. Démontrer la linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 16. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable à valeurs complexes. Le but de l'exercice est de *montrer* que la fonction $|f|$ est (R)-intégrable.

(1) Soient $u := \mathrm{Re}(f)$ et $v := \mathrm{Im}(f)$. Montrer que si θ_1, θ_2 sont des fonctions en escalier (à valeurs réelles) et si on pose $\phi = \theta_1 + i\theta_2$, alors

$$\big||\phi| - |f|\big| \leqslant |\theta_1 - u| + |\theta_2 - v|.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 17. Le but de l'exercice est de montrer que pour toute fonction (R)-intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^1 f(a + sh)\,hds \qquad \text{où } h = b - a.$$

(1) Démontrer le résultat pour une fonction f *en escalier* en utilisant uniquement la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.
(2) En déduire le résultat pour une fonction (R)-intégrable quelconque.

Exercice 18. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable.

(1) On suppose que f est continue et qu'il existe un point $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Montrer qu'on peut trouver un intervalle non trivial $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ et une constante $\eta > 0$ tels que $|f(t)| \geqslant \eta$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.
(2) On suppose que f est continue. Montrer que si $\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$, alors $f = 0$.
(3) Montrer que le résultat de (2) est faux si f n'est pas supposée continue.

Exercice 19. Le but de l'exercice est de montrer que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions (R)-intégrables positives, alors

$$\int_a^b fg \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}\,.$$

Ce résultat s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** pour les intégrales.

(1) Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\beta \leqslant \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.
(2) Soient f, g deux fonctions positives et (R)-intégrables sur $[a, b]$. Déduire de (1) que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$(*) \qquad \int_a^b fg \leqslant \frac{\lambda}{2}\int_a^b f^2 + \frac{1}{2\lambda}\int_a^b g^2.$$

(3) On suppose que $\int_a^b f^2 \neq 0$. Étudier la fonction de λ apparaissant au second membre de $(*)$, et en déduire l'inégalité souhaitée.
(4) Démontrer l'inégalité souhaitée dans le cas où $\int_a^b f^2 = 0$.

Exercice 20. Pour toute fonction (R)-intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, on définit une fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \;:\; \widehat{f}(\lambda) = \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\widehat{f}(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour toute $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Ce résultat s'appelle le **lemme de Riemann-Lebesgue**.

(0) Expliquer pourquoi il suffit de démontrer le résultat pour une fonction f à valeurs réelles.
(1) Montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai pour toute fonction f *en escalier*.
(2) Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{R}([a,b])$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{u}(\lambda)| \leqslant \int_a^b |u(t)|\,dt$.
(3) Soit f une fonction (R)-intégrable sur $[a,b]$ (à valeurs réelles), et soit $\varepsilon > 0$. En utilisant (2) et l'Exercice 11, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ :\ |\widehat{f}(\lambda)| \leqslant |\widehat{\varphi}(\lambda)| + \varepsilon\,.$$

(4) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction (R)-intégrable f générale (à valeurs réelles).

Exercice 21. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(0) := 0$ et $F(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que F est dérivable en tout point mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$. Montrer que f ne possède pas de primitive.

Exercice 23. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_{a,n} := \int_0^\pi e^{at} \sin(nt)\,dt$.

Exercice 24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\cdot$

(1) En utilisant convenablement la relation de Chasles, montrer qu'on a

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}\cdot$$

(2) En déduire que H_n est équivalent à $\ln(n)$ quand $n \to \infty$; autrement dit, que

$$\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Exercice 25. Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\cdot$ En raisonnant comme dans l'Exercice 24, montrer que S_n est équivalent à $\frac{1}{1-\alpha}\, n^{1-\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On pose $g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 27. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\int_a^b |f(t)|\, dt = 0$. Montrer que la fonction F définie par $F(x) := \int_a^x |f(t)|\, dt$ est identiquement nulle, et en déduire que $f = 0$.

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) := \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt\,.$$

Montrer que ϕ est solution de l'équation différentielle $\phi'' + \phi = f$.

Exercice 29. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Pour $x > 0$, on pose $g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que la fonction g est croissante.

Exercice 30. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} f(t)\, dt$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 31. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $c > 0$.

(1) On suppose que $f(t)$ tend vers 0 quand $t \to \infty$. Montrer que $\int_A^{cA} \frac{f(t)}{t}\, dt$ tend vers 0 quand $A \to \infty$.

(2) On supose que f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ en $+\infty$. Montrer que $\int_A^{cA} \frac{f(t)}{t}\, dt$ admet une limite quand $A \to \infty$ et préciser la valeur de cette limite.

Exercice 32. Soient a, b vérifiant $0 < a < b$. Écrire $\ln(b) - \ln(a)$ sous forme d'une intégrale, et en déduire l'inégalité

$$\ln(b) - \ln(a) \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}\cdot$$

(*Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz; voir l'Exercice 19.*)

Exercice 33. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0 = f(1)$, et soit $\alpha > 0$.

(1) On pose $\phi(t) = t^\alpha f(t)$. Pour $t > 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\phi(t)$ et de $\phi'(t)$, puis montrer que

$$t^{2\alpha+1} f'(t)^2 = t\phi'(t)^2 - 2\alpha\phi(t)\phi'(t) + \alpha^2 t^{2\alpha-1} f(t)^2.$$

(2) Démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 t^{2\alpha+1} f'(t)^2\, dt \geqslant \alpha^2 \int_0^1 t^{2\alpha-1} f(t)^2\, dt\,.$$

Exercice 34. Montrer que $\forall x > 0 \ : \ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0 \ : \ \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 35. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \int_0^x \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exercice 36. Dans cet exercice, on considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt.$$

(1) Étudier le sens de variation F.
(2) Montrer que F est impaire.
(3) En utilisant les inégalités $1+t^2 \leqslant (1+t)^2$ (valable pour $t \geqslant 0$) et $1+t^4 \geqslant t^4$ et en considérant $F(x) - F(1)$, montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.
(4) Tracer le graphe de F.

Exercice 37. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$. Montrer que F est dérivable à gauche et à droite en tout point.

Exercice 38. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\, dt$.

(1) Soient $u, v \in I$ avec $u \leqslant v$, et $\lambda \in [0,1]$. On pose $z_\lambda := (1-\lambda)u + \lambda v$. Vérifier que $u \leqslant z_\lambda \leqslant v$ et qu'on a

$$F(z_\lambda) - \big((1-\lambda)F(u) + \lambda F(v)\big) = (1-\lambda) \int_u^{z_\lambda} f - \lambda \int_{z_\lambda}^v f\,.$$

(2) Montrer que pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$F\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)\,.$$

(*Une fonction F vérifiant cette propriété est dite **convexe**.*)

Exercice 39. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. On suppose que la fonction F' est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a)$. (La subtilité est qu'on ne suppose *pas* que F' est continue sur $[a,b]$.)

(1) Soient φ une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $\varphi \leqslant F'$. Soit également $S = (s_0, \ldots, s_N)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ. Montrer qu'on a $\int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi \leqslant F(s_{k+1}) - F(s_k)$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$.

(2) Montrer que si φ et ψ sont des fonctions en escalier telles que $\varphi \leqslant F' \leqslant \psi$, alors $\int_a^b \varphi \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \int_a^b \psi$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.