Feuille d'exercices n^o 1

Exercice 1. Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné. Pour tout $x \in [a,b]$, on se donne un intervalle ouvert V_x tel que $x \in V_x$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : tout intervalle $J \subseteq [a,b]$ vérifiant $|J| \leq \delta$ est contenu dans un certain V_x. (Ce résultat s'appelle le **Lemme de Lebesgue**.)

(1) Soit $(s_0, \ldots, s_N)$ une subdivision de $[a,b]$, et soit $\delta > 0$. Montrer que si $J \subseteq [a,b]$ est un intervalle tel que $|J| \leq \delta$, alors il existe $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ tel que $J \subseteq [s_k - \delta, s_{k+1} + \delta]$.
(2) Soit $[p,q]$ un intervalle fermé borné, et soit V un intervalle ouvert. Montrer que si $[p,q] \subseteq V$, alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que $[p - \eta, q + \eta] \subseteq V$.
(3) Démontrer le résultat souhaité en utilisant le Lemme de Cousin.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de donner une preuve du *théorème des valeurs intermédiaires* différente de celle vue au 1er semestre. On fixe donc une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) < 0 < f(b)$, et on veut montrer qu'il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que $\forall x \in [a,b] \ : \ f(x) \neq 0$.

(1) En utilisant la définition de la continuité, montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on peut trouver un intervalle ouvert V_x centré en x tel que f est de signe constant sur $V_x \cap [a,b]$. (*On pourra prendre ε tel que* $0 < \varepsilon < |f(x)|$.)
(2) En déduire qu'il existe une subdivision $(s_0, \ldots, s_N)$ de $[a,b]$ telle que, pour chaque $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, la fonction f est de signe constant sur $[s_k, s_{k+1}]$.
(3) En déduire une contradiction, et conclure.

Exercice 3. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite **bornée sur** I s'il existe une constante C telle que $\forall t \in I \ : \ |f(t)| \leq C$. Le but de l'exercice est de donner une preuve (différente de celle vue au 1er semestre) du fait que toute fonction *continue* sur un intervalle *fermé borné* $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$.

(1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. En utilisant la définition de la continuité avec $\varepsilon = 6$, montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on peut trouver un intervalle ouvert V_x centré en x tel que f est bornée sur $V_x \cap [a,b]$.
(2) En déduire qu'il existe une subdivision $(s_0, \ldots, s_N)$ de $[a,b]$ telle que, pour chaque $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, la fonction f est bornée sur $[s_k, s_{k+1}]$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 4. Le but de l'exercice est de donner une preuve de l'*inégalité des accroissements finis* différente de celle vue au 1er semestre. On se donne donc une fonction dérivable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle $f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, où M est une constante, et on veut montrer qu'on a $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

(1) Soit $C > M$. En utilisant la définition de la dérivée, montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on peut trouver un intervalle ouvert V_x centré en x tel que $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq C$ pour tout $z \in V_x \cap [a, b]$, $z \neq x$.

(2) On garde les notations de (1). Montrer que si $x \in [a, b]$, alors

$$f(v) - f(u) \leq C(v - u) \qquad \text{pour tous } u, v \in V_x \text{ tels que } u \leq x \leq v.$$

(3) En utilisant le Lemme de Cousin, montrer que pour tout $C > M$, on a $f(b) - f(a) \leq C(b - a)$.

(4) Conclure.

Exercice 5. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est **uniformément continue sur** I si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$(*) \qquad \forall u, v \in I \text{ vérifiant } |v - u| \leq \delta, \quad \text{on a} \quad |f(v) - f(v)| < \varepsilon.$$

Le but de l'exercice est de montrer que si $I = [a, b]$ est un intervalle *fermé borné*, alors toute fonction continue sur $[a, b]$ est uniformément continue. On fixe donc une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$, et on cherche $\delta > 0$ vérifiant $(*)$.

(1) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on peut trouver un intervalle ouvert V_x contenant x tel que

$$\forall u, v \in V_x \ : \ |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

(2) Conclure en utilisant le Lemme de Lebesgue (Exercice 1).

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si la fonction f' est *bornée* sur I, alors f est uniformément continue.

Exercice 7. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction uniformément continue sur I est bornée.

Exercice 8. Montrer que $f(t) = 1/t$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 9. Soit $\alpha > 0$, et soit $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t^\alpha$. Le but de cette question est de montrer que la fonction f_α est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha \leq 1$.

(1) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que si $u \in \mathbb{R}^+$ et $\eta > 0$, alors $(u+\eta)^\alpha - u^\alpha \geq \alpha\eta\, u^{\alpha-1}$; et en déduire que f_α n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
(2) On suppose que $\alpha \leq 1$.
   (a) En étudiant $\varphi(t) = (1+t)^\alpha - t^\alpha$, montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $(1+t)^\alpha \leq 1 + t^\alpha$.
   (b) En déduire que pour tous $u, h \geq 0$, on a $(u+h)^\alpha \leq u^\alpha + h^\alpha$.
   (c) Montrer que f_α est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A_\varepsilon > 0$ tel que $\forall s > A_\varepsilon$: $|f(s) - f(A_\varepsilon)| < \varepsilon$.
(2) Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : \ f(x) \leq A + Bx.$$

(1) Soit $\delta > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on peut trouver un entier n_x et un point $u_x \in [0, \delta]$ tel que $x = u_x + n_x\delta$. En déduire, en utilisant le fait que f est bornée sur $[0, \delta]$, qu'il existe une constante A_δ telle que

$$|f(x)| \leq A_\delta + n_x \times \max\Big\{ \big|f(u_x + (i+1)\delta) - f(u_x + i\delta)\big|;\ 0 \leq i < n_x \Big\}.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant la définition de l'uniforme continuité avec $\varepsilon = 6$.

Exercice 12. Déduire de l'exercice 11 que si $\alpha > 1$, alors $f(x) := x^\alpha$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Montrer que si $\widetilde{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que l'ensemble $\{t \in [a, b];\ \widetilde{\varphi}(t) \neq \varphi(t)\}$ est *fini*, alors $\widetilde{\varphi}$ est en escalier.

Exercice 14. Si φ et ψ sont des fonctions sur $[a, b]$, on note $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ les fonctions définies par $\varphi \vee \psi\,(t) = \max\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ et $\varphi \wedge \psi\,(t) = \min\big(\varphi(t), \psi(t)\big)$. Montrer que si φ et ψ sont en escalier, alors $\varphi \vee \psi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont en escalier.

Exercice 15. Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Pour tout intervalle $I \subseteq [a,b]$, on note $\mathbf{1}_I : [a,b] \to \mathbb{R}$ la **fonction indicatrice de** I, qui est définie par $\mathbf{1}_I(t) = 1$ si $t \in I$ et $\mathbf{1}_I(t) = 0$ si $t \notin I$.

(1) Justifier que $\mathbf{1}_I$ est une fonction en escalier, pour tout intervalle $I \subseteq [a,b]$.
(2) Montrer qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement si elle est de la forme $\varphi = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \, \mathbf{1}_{I_j}$, où les I_j sont des intervalles et $\beta_1, \ldots, \beta_M \in \mathbb{R}$. (*Ne pas oublier que les singletons sont des intervalles.*)

Exercice 16. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Montrer que si φ est continue sur $[a,b]$, alors elle est constante.

Exercice 17. Soit $[a,b]$ un intervalle non trivial, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $f(t) = 0$ si $t \notin \mathbb{Q}$. La fonction f est-elle réglée?

Exercice 18. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x > 0$. La fonction f est-elle réglée?

Exercice 19. Montrer que si f et g sont des fonctions réglées sur un intervalle $[a,b]$, alors fg, $f+g$ et $|f|$ sont réglées.

Exercice 20. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est *dénombrable* (éventuellement fini).

(1) Justifier l'existence d'une suite (φ_n) de fonctions en escalier telle que

$$\forall n \; \forall t \in [a,b] \; : \; |\varphi_n(t) - f(t)| \leq 2^{-n}.$$

(2) On note G l'ensemble des points $t \in [a,b]$ qui sont des points de continuité de toutes les fonctions φ_n. En observant qu'une fonction en escalier n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, montrer que $D = [a,b] \setminus G$ est dénombrable.
(3) Dans cette question, on veut montrer que *tout point de G est un point de continuité de f*. On fixe donc $t_0 \in G$ et $\varepsilon > 0$, et on cherche à montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(t_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$ vérifiant $|x - t_0| < \delta$.
   (a) Justifier l'existence d'un entier n tel que $\forall t \in [a,b] \; : \; |\varphi_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon/3$.
   (b) Montrer que $\forall x \in [a,b] \; : \; |f(x) - f(t_0)| \leq 2\varepsilon/3 + |\varphi_n(x) - \varphi_n(t_0)|$.
   (c) Conclure.
(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 21. Donner un exemple de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas réglée mais possède un seul point de discontinuité.

Exercice 22. L'Exercice 20 montre en particulier que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable. Dans le présent exercice, on veut donner une autre preuve de ce résultat. On fixe donc une fonction croissante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'un point $x \in]a,b[$ est un point de discontinuité de f si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(x^+) - f(x^-) \geq 1/k$.

(2) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $D_\varepsilon := \big\{x \in]a,b[\,;\ f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\big\}$.

   (a) Montrer que si $x_1 < \cdots < x_N$ sont des points de D_ε, alors
$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{N} \big(f(x_i^+) - f(x_i^-)\big) \geq N\,\varepsilon.$$

   (b) En déduire que D_ε est un ensemble fini.

(3) Conclure.

Exercice 23. Donner un exemple de fonction croissante sur $[0,1]$ qui possède une infinité de points de discontinuité.