Examen du 18 Juin 2018

Durée : 3h

Cet examen est constitué uniquement de "questions de cours"

(1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle compact $[a,b]$. On suppose la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.

  (a) Montrer par un exemple que la fonction f n'est pas nécessairement continue.

  (b) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors f est continue.

  (c) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f_n(t)\,dt$ tend vers $\int_a^b f(t)\,dt$ quand $n\to\infty$.

(2) Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\int_0^1 \sin(e^{x^2t})\,dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une formule pour $f'(x)$.

(3) Montrer que $f(t) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}\,t}$ est bien défini pour tout $t>0$, et que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(4) Soit I un ensemble non vide. On note $\ell^\infty(I)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions bornées $f: I\to\mathbb{C}$. Montrer que $\ell^\infty(I)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(5) Soit (M,d) un espace métrique, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans M. Montrer que si la suite (x_n) possède une sous-suite convergente, alors elle est convergente.

(6) Soit E un espace vectoriel normé complet, et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On suppose que la série $\sum \|x_k\|$ est convergente. Montrer que la série $\sum x_k$ converge dans E.

(7) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et soit $r>0$. Montrer que si la suite (a_nr^n) est bornée, alors la série $\sum a_nz^n$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $|z|<r$. Comment s'appelle ce résultat?

(8) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\Sigma_1 = \sum_{n\geq 1} (3+2i)^n n^{n^{5/6}} z^n \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{5n}}{(n!)^5} z^n.$$

(9) Donner le développement en série entière de la fonction arctan au voisinage de 0 en précisant sur quel intervalle il est valable; puis montrer que la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x \arctan(8t^3)\, dt$ est développable en série entière sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, et déterminer son développement.

(10) Montrer que $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ est développable en série entière sur $]-3/2, 3/2[$ et déterminer sont développement. En déduire le développement en série entière de $g(x) = \frac{1}{(3-2x)^2}$.

(11) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'on a $|f^{(k)}(u)| \leq \sqrt{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(12) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. On suppose que les 3 séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ sont convergentes. En utilisant le Théorème d'Abel, montrer que

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \Big(\sum_{n=0}^\infty a_n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^\infty b_n\Big).$$

(13) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$.

(14) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, et en déduire la valeur de $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

(15) En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, montrer que pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{t}{2}$.