Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Suites et séries de fonctions*

Examen du 14 Mai 2018

Durée : 3h

Questions de cours.

(1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur $[0,\infty[$. On suppose que toutes les f_n tendent vers 0 à l'infini, et que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [0,\infty[\to\mathbb{C}$. Montrer que f tend vers 0 à l'infini.

(2) Soit $\alpha > 1$. Montrer que $f(t) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^\alpha t}$ est bien défini pour tout $t > 0$, et que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(3) Soit I un ensemble non vide. On note $\ell^\infty(I)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions bornées $f : I \to \mathbb{C}$. Montrer que $\ell^\infty(I)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(4) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\Sigma_1 = \sum_{n\geq 1} (2+i)^n n^{n^{2/3}} z^n \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{3n}}{(n!)^3}\, z^n.$$

(5) Donner le développement en série entière de la fonction $u \mapsto \log(1+u)$ au voisinage de 0 en précisant sur quel intervalle il est valable; puis montrer que la fonction f définie par $f(x) = \int_0^x \log(1+t^4)\,dt$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et déterminer son développement.

(6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'on a $|f^{(k)}(u)| \leq \sqrt{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}$.

(8) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi,\pi]$, et en déduire la valeur de $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

(1) Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, étudier les variations de f_n sur $[0,1]$ et en déduire que $\|f_n\|_\infty = \frac{n^\alpha}{n+1}\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)^n$.
(3) Déterminer pour quelles valeurs de α on a convergence *uniforme* de (f_n) vers 0 sur $[0,1]$.

Exercice 2. On note $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$I(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k (k!)^2}.$$

(1) Justifier la définition de I, puis montrer que I est solution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad x\, y''(x) + y'(x) - x\, y(x) = 0.$$

(2) Montrer que la fonction J définie par $J(x) = \int_0^\pi e^{x\cos\theta} d\theta$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie elle aussi l'équation différentielle $(*)$. (*Suggestion : intégrer par parties dans la formule donnant $J'(x)$.*)
(3) Vérifier que $J(0) = \pi I(0)$ et $J'(0) = \pi I'(0)$.
(4) On *admet* que (1), (2) et (3) entrainent que $J = \pi I$, autrement dit que

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta} d\theta \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de l'intégrale $W_n = \int_0^\pi (\cos\theta)^n d\theta$.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

(1) Justifier que S est bien définie.
(2) Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la somme de la série entière $\Sigma \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n$,

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\, x^n.$$

Justifier la définition; puis calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = (x+1)\log(x+1) - x$.
(3) Calculer S.