Examen du 18 Juin 2018

Durée : 3h

Cet examen est constitué uniquement de "questions de cours"

Notations. Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Si X est une va réelle, on note F_X sa fonction de répartition et φ_X sa fonction caractéristique.

(1) Une population est constituée d'individus de types A, B et C. Il y a 20% d'individus de type A, 30% d'individus de type B et 50% d'individus de type C. On sait que 90% des individus de type A, 80% des individus de type B et 10% des individus de type C aiment le chocolat. Déterminer la probabilité qu'un individu soit de type C sachant qu'il n'aime pas le chocolat.

(2) Soit Z une va réelle uniformément distribuée sur $[0,1]$. Déterminer la probabilité que le polynôme $P(x) = x^2 + x + Z$ admette deux racines réelles distinctes.

(3) Soit X une va suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = e^X$.

(4) Soient X et Y deux va indépendantes. On suppose que Y est uniformément distribuée sur $]0,1[$, et que X suit la loi $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)\,dx$. Déterminer la loi de $Z = \frac{X}{Y}\cdot$

(5) Soit X une va réelle. Montrer que si F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors X est à densité. La réciproque est-elle vraie?

(6) Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans un univers $(\Lambda, \mathfrak{B})$. On suppose que les X_i suivent toutes la même loi μ. Soit également T une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{T = n\}$ appartient à la tribu $\sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$. On définit une application $X_T = \Omega \to \Lambda$ en posant $\forall \omega \in \Omega \;:\; X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$. Justifier que X_T est une va, puis montrer que $\mathbb{P}_{X_T} = \mu$.

(7) Calculer l'espérance d'une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et la variance d'une va uniformément distribuée sur un intervalle $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

(8) Soit X une va réelle. On suppose qu'il existe des constantes $c, \alpha > 0$ telles que $e^{c|X|^\alpha} \in L^1$. En utilisant la formule d'intégration par parties et l'inégalité de Markov, montrer que $X \in L^p$ pour tout $p < \infty$.

(9) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de va réelles. On suppose que les Z_n sont dans L^p pour un certain $p > 1$, et que la suite (Z_n) est bornée en norme L^p. Montrer que $\frac{Z_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0.

(10) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va deux à deux indépendantes, appartenant à L^2 et centrées. On suppose que la suite (X_i) est bornée en norme L^2. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 en norme L^2.

(11) Soit $\lambda > 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Z_n une va suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une va suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

(12) Montrer que pour une suite de va réelles, la convergence en norme L^1 entraine la convergence en probabilité et la convergence en probabilité entraine la convergence en loi.

(13) Soit (X_n) une suite de va réelles. Montrer que si (X_n) converge en loi vers 0, alors (X_n) converge en probabilité vers 0.

(14) Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, et soit $\lambda > 0$. En considérant une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ et en appliquant la loi des grands nombres, montrer qu'on a

$$f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!}\cdot$$

(15) On joue une infinité de fois à pile ou face. Pour $n \geq 1$, on note P_n le nombre de "piles" obtenus après n lancers, F_n le nombre de "faces" obtenus après n lancer, et on pose $\Delta_n = P_n - F_n$. Soient également $a < b$ donnés. En utilisant le théorème limite central, déterminer la limite de $\mathbb{P}(\sqrt{n}\, a \leq \Delta_n \leq \sqrt{n}\, b)$ quand $n \to \infty$.

(16) Soit X et Y deux va réelles indépendantes, et soit $Z = XY$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_Y(xt)\, d\mathbb{P}_X(x)$; puis calculer $\varphi_Z(t)$ dans le cas où X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(17) Soit X une va réelle telle que φ_X est dérivable en 0, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant les fonctions caractéristiques et le développement limité de φ_X en 0, montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge en loi vers la constante $m = \varphi_X'(0)$.

(18) Soit X et Y deux va réelles indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que les va $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.