

Examen du 17 Mai 2018

Durée : 3h

Remarques. Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Si X est une va réelle, on note F_X sa fonction de répartition et φ_X sa fonction caractéristique.

Questions de cours.

- (1) Soit X une va uniformément distribuée sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$.
- (2) Soit X une va réelle. Montrer que si F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , alors X est à densité. La réciproque est-elle vraie?
- (3) Soient X et Y deux va indépendantes, strictement positives, et de même loi. Montrer que les va (X, Y) et (Y, X) ont la même loi, et en déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right) = \frac{1}{2}$.
- (4) Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance d'une va suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, et la variance d'une va suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
- (5) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va réelles appartenant à L^2 . On suppose que la suite (X_n) est bornée dans L^2 . Montrer que $\frac{X_n}{n^\alpha} \xrightarrow{\text{ps}} 0$ pour tout $\alpha > 1/2$.
- (6) Soit X une va réelle telle que $X \geq 1$ ps. On suppose qu'il existe une constante A telle que $\forall s \geq 1 : \mathbb{P}(X > s) \leq \frac{A}{s}$. Montrer que la va $Y = \log(X)$ appartient à L^p pour tout $p < \infty$.
- (7) Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, continue au point $m = \frac{a+b}{2}$. En appliquant convenablement la loi des grands nombres, montrer que $\frac{1}{(b-a)^n} \int_{[a,b]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$ tend vers $f(m)$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (8) On joue une infinité de fois à pile ou face. Pour $n \geq 1$, on note S_n le nombre de "piles" obtenus après n lancers. En utilisant le Théorème Limite Central, montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq \frac{n}{2} + \sqrt{n})$ admet une limite L à déterminer quand $n \rightarrow \infty$.
- (9) En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois normales $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2)$ et $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$, alors $X + Y$ suit une loi normale de paramètres à préciser.

Exercice 1. Soit X une va à valeurs dans $[-1, 1]$ et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $r > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq 2e^{-r^2/2}.$$

- (1) En utilisant par exemple la convexité de l'exponentielle, montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t$.
- (2) En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{\lambda^2/2}$ et $\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \leq e^{\lambda^2/2}$.
- (3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 2. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Cauchy $\frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$. Pour $n \geq 1$ on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de M_n , puis montrer que la suite $(\frac{M_n}{n})$ converge en loi vers une va $Z > 0$ telle que $\frac{1}{Z}$ suit une loi exponentielle de paramètre à déterminer. (*On pourra se souvenir que $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.*)

Exercice 3. Soit X une va réelle appartenant à L^1 , d'espérance $\mathbb{E}(X) = c \geq 0$, et soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Soit également $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1]$ telle que $p_n \rightarrow 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne une va N_n à valeurs dans \mathbb{N}^* indépendante des X_j et suivant une loi géométrique de paramètre p_n , i.e. $\mathbb{P}(N_n = k) = (1 - p_n)^{k-1} p_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k = X_1 + \dots + X_k$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n(\omega) = p_n S_{N_n(\omega)}(\omega) = p_n (X_1(\omega) + \dots + X_{N_n(\omega)}(\omega)).$$

- (1) Justifier que les Z_n sont des va.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En observant que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_n = k\}$, montrer que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\mathbb{E}(f(Z_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k) \mathbb{E}(f(p_n S_k)).$$

- (3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{Z_n}(t) = \frac{p_n \varphi_X(tp_n)}{1 - (1 - p_n) \varphi_X(tp_n)}.$$

- (4) En utilisant le développement limité de φ_X à l'ordre 1 en 0, montrer que si $c = 0$, alors la suite (Z_n) converge en loi vers 0, et que si $c > 0$, alors (Z_n) converge en loi vers une va Z suivant la loi exponentielle de paramètre $1/c$.