L3 Probabilités

DS du 12 Avril 2018

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$

Questions de cours.

(1) Soit X une va réelle. On suppose qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $e^{a|X|} \in L^1$. En utilisant convenablement la formule d'intégration par parties et l'inégalité de Markov, montrer que $X \in L^p$ pour tout $p < \infty$.

(2) On lance une infinité de fois un dé; et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proportion de 3 obtenue après n lancers. "Modéliser" la situation, et montrer que P_n tend presque sûrement vers 1/6.

(3) Soit X une va réelle appartenant à L^2, de moyenne m, et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant convenablement le Théorème Limite Central, montrer que $\mathbb{P}\big(\frac{S_n}{n} > m\big)$ et $\mathbb{P}\big(\frac{S_n}{n} < m\big)$ tendent toutes les deux vers 1/2 quand $n \to \infty$.

(4) Calculer la fonction caractéristique d'une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles ≥ 0. Soit également $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, croissante, telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $\mathbb{E}\big(\phi(X_n)\big)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $Z_n = M_n - \frac{1}{\lambda}\log(n)$ converge en loi vers une va Z dont on déterminera la fonction de répartition.

Exercice 3. Soit X une va réelle ≥ 0 appartenant à L^2, de moyenne $m = 1$ et de variance σ^2; et soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\frac{\sqrt{S_n}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ converge presque sûrement vers une constante à déterminer, et en déduire que $\sqrt{S_n} - \sqrt{n}$ converge en loi vers une va dont la loi est à déterminer.