DS du 5 Mars 2018

Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$

Questions de cours.

(1) Soit X une va réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Montrer que $aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

(2) Soient X et Y des va indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et suivant des lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

(3) Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles, et soit (Y_k) une suite de va réelles positives. On suppose que la série $\sum Y_k$ converge presque sûrement, et qu'on a $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(|X_k| > Y_k\big) < \infty$. Montrer que la série $\sum X_k$ converge presque sûrement.

Exercice 1. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. On pose $m = \min(X, Y)$.

(1) On note F_X, F_Y et F_m les fonctions de répartition de X, Y et m. Montrer que $F_m = F_X + F_Y - F_X F_Y$.

(2) On suppose que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de m.

Exercice 2. Soit $(X_i)_{i\geq 0}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans un univers $(\Lambda, \mathfrak{B})$. Soit également T une va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note $X_T : \Omega \to \Lambda$ l'application définie comme suit :

$$\forall \omega \in \Omega \ : \ X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

(1) Montrer que X_T est une va (*i.e.* que X_T est mesurable).

(2) On suppose d'une part que les X_i suivent toutes la même loi μ, et d'autre part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $\{T = n\}$ appartient à la tribu $\sigma(X_0, \ldots, X_{n-1})$. Montrer que que $\mathbb{P}_{X_T} = \mu$.

Exercice 3. Soient $a, b > 0$, et soient X et Y deux va indépendantes, avec X uniformément distribuée sur $]0, a[$ et Y uniformément distribuée sur $]0, b[$. Déterminer la loi de XY.