Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 8

Exercice 1. Soient, $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R,h) \subset \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des (x,y). Calculer le volume de $\mathcal{C}(R,h)$.

Exercice 2. Soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$, et soit $h > 0$. En considérant B comme un borélien de $\mathbb{R}^3$ contenu dans le plan des (x,y), on note $\mathcal{C}(B,h) \subseteq \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h et de base B. Calculer le volume de $\mathcal{C}(B,h)$ en fonction de h et de $\lambda_2(B)$.

Exercice 3. Soit $R > 0$. On pose $B(R) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x^2+y^2+z^2+t^2 \le R^2\}$. Calculer $\lambda_4(B(R))$.

Exercice 4. Soit $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\cdot$$

Montrer que les deux intégrales itérées $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$ existent mais *ne sont pas égales*. Ceci contredit-il le théorème de Fubini?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, et soit G_f le graphe de f. Montrer que $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 6. Calculer l'intégrale $J = \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}\,\cdot$

Exercice 7. Calculer $J = \int_\Omega \frac{dxdy}{x^2y}$, où $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 1 \text{ et } 1/x \le y \le x\}$.

Exercice 8. Soit $a > 0$, et soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le a \text{ et } x+y \le a\}$. Calculer l'intégrale $J = \int_\Omega e^{2x+y}dxdy$.

Exercice 9. Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le z \le y \le 1 \text{ et } 0 \le x \le yz\}$. Calculer $J = \int_\Omega x^3yz^2\,dxdydz$.

Exercice 10. Montrer que la fonction f définie par $f(x,y) = \frac{e^{-y}\sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}$ est intégrable sur $\Omega =]0,\infty[\times]0,\infty[$, et calculer $J = \int_\Omega f(x,y)\,dxdy$.

Exercice 11. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$. Pour $\alpha > 0$, on note D_α le disque de centre $(0,0)$ et de rayon α dans $\mathbb{R}^2$, et on pose

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \int_{D_\alpha} f(x,y)\,dxdy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(\alpha)\,d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$.

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in I \times I$.

(2) En déduire, en considérant $\int_{I\times I}(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\,dxdy$, qu'on a

$$\int_I fg \geq \left(\int_I f\right) \times \left(\int_I g\right).$$

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions positives sur un intervalle $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, avec de plus $g(t) > 0$ sur $]a,b]$. On suppose que f est croissante et que g est décroissante. On définit $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

(1) Justifier que $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ est bien défini sur $]a,b]$.

(2) Vérifier que si $x, y \in [a,b]$, alors

$$F(y)\,G(x) - F(x)\,G(y) = \int_a^x g(u)\,du \int_x^y f(v)\,dv - \int_x^y g(v)\,dv \int_a^x f(u)\,du.$$

(3) Montrer que la fonction h est croissante sur $]a,b]$.

Exercice 14. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$, et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x))\,dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\,\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ f(x) > t\})\,dt\,.$$

Exercice 15. (formule d'intégration par parties "générale")
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, et soient F et G les fonctions définies par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_0^x g(t)dt$. Montrer à l'aide du théorème de Fubini que pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on a $\int_a^b f(x)(G(x) - G(a))dx = \int_a^b (F(b) - F(x))g(x)dx$, et en déduire la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx\,.$$

Exercice 16. Soit $\phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une bijection continue strictement croissante (avec donc $\phi(0)=0$), et soient $a,b\geq 0$.

(1) Expliquer pourquoi $\int_0^a \phi(x)\,dx = \lambda_2\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq a \text{ et } y\leq\phi(x)\}\big)$, et montrer que $\int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy = \lambda_2\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq y\leq b \text{ et } y>\phi(x)\}\big)$.

(2) En déduire que si $b=\phi(a)$, alors $\int_0^a \phi(x)\,dx + \int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy = ab$.

(3) Démontrer l'**inégalité de Young** : $\int_0^a \phi(x)\,dx + \int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy \geq ab$. (*Distinguer les cas $b\geq\phi(a)$ et $b\leq\phi(a)$, i.e. $a\geq\phi^{-1}(b)$.*)

Exercice 17. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0$. Montrer que pour presque tout $y\in\mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0$.

Exercice 18. (produit de convolution)
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

est bien défini pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, et que la fonction (presque partout définie) $f*g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = ye^{-y^2(1+x^2)}$. Calculer l'intégrale “itérée” $\int_0^\infty \big(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\big)\,dx$, et en déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^\infty e^{-t^2}dt$.

Exercice 20. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2-1}\,dx\,.$$

(1) Effectuer le changement de variable $x=1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2-1}\,dx$, et en déduire qu'on a

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2-1}\,dx\,.$$

(2) Pour $y>0$ fixé, calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2}\cdot$

(3) Soit $x\in]0,1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y\mapsto\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2\,\frac{\log(x)}{x^2-1}\cdot$$

(4) Calculer J en utilisant (2) et (3).

Exercice 21. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt\,.$$

(1) Soit $\Omega =]0,1[\times]0,1[\times]0,\infty[\subset \mathbb{R}^3$, et soit $g = \Omega \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}\,.$$

Montrer qu'on a

$$J = \int_\Omega g(x,y,t)\,dxdydt\,.$$

(2) Vérifier que pour $(x,y,t)\in\Omega$ tel que $x \neq y$, on a

$$g(x,y,t) = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{1+y^2t^2}\right).$$

(3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a

$$\int_\Omega g(x,y,t)\,dxdydt = \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}\,.$$

(4) Calculer J.

Exercice 22. Soient α,β vérifiant $0<\alpha<\beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu}du\right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\,dt\,.$$

Exercice 23. En considérant l'intégrale double $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\,dxdy$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t^2}\,dt\,.$$

Exercice 24. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,.$$

(1) Soit $y>0$ fixé.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(2x)e^{-yx}$ est intégrable sur $]0,\infty[$ et qu'on a

$$\int_0^\infty \cos(2x)\,e^{-yx}\,dx = \frac{y}{y^2+4}\,.$$

(b) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, en déduire que

$$\int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-yx}\, dx = \frac{2}{y(y^2+4)}\,.$$

(2) Soit $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x,y) = y\, \sin^2 x\, e^{-xy}$. En utilisant (1b), calculer l'intégrale "itérée"

$$J' = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

(3) Calculer J.

Exercice 25. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

(1) Soit $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{-xy} \sin x$.

(a) Montrer que f est intégrable sur $]0,A[\times]0,\infty[$ pour tout $A > 0$, et qu'on a

$$\int_{]0,A[\times]0,\infty[} f(x,y)\, dxdy = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx\,.$$

(b) Montrer que pour $A > 0$ et $y > 0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x,y)\, dx = \frac{1}{1+y^2} - \cos A\, \frac{e^{-yA}}{1+y^2} - \sin A\, \frac{ye^{-yA}}{1+y^2}\,.$$

(2) Calculer J.

Exercice 26. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ x^2+y^2 < 1\}$. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $(x,y) \mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω.

Exercice 27. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}$. En utilisant le changement de variable $(u,v) = (x+y, x-y)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} f(x-y)e^{-(x+y)} dxdy = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|} dv\,.$$

Exercice 28. On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-x^2y^2}\,.$

(1) Soit $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\,,\ v > 0\,,\ u+v < \pi/2\}$ et soit $\Phi = \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u,v) = \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u}\right) .$$

Montrer que Φ est un difféomorphisme de Ω sur le carré $\Omega' =]0,1[\times]0,1[$.

(2) Calculer J en posant $(x,y) = \Phi(u,v)$.

Exercice 29. On veut calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy}$ ·

(1) En utilisant le changement de variables $(u,v) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\int_C \frac{dudv}{1-u^2+v^2}\,,$$

où C est le carré de sommets $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ et $(1/2,1/2)$.

(2) On pose $C_+ = \{(u,v) \in C;\ v \geq 0\}$ et $I = \int_{C_+} \frac{dudv}{1-u^2+v^2}$ ·

(a) Montrer qu'on a

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

(b) Calculer les deux intégrales précédentes en posant $u = \sin t$ dans la première et $u = \cos(2t)$ dans la deuxième.

(3) Calculer J.

Exercice 30. Utiliser l'exercice 29 pour calculer la somme $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$·

Exercice 31. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ la somme d'une série entière convergente dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(1) Pour $r \in [0,1[$, exprimer $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ à l'aide de r et des coefficients a_n.

(2) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2\, dxdy = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\,\cdot$$

Exercice 32. Pour $a,b,c > 0$, on pose

$$\mathcal{E}(a,b,c) = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

(1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1,1,1)$?

(2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a,b,c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 33. Pour $a,b,c,h>0$, on pose

$$\mathcal{H}(a,b,c,h)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ |z|\le h \text{ et } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.$$

Calculer le volume de $\mathcal{H}(1,1,1,h')$ pour tout $h'>0$, et en déduire le volume de $\mathcal{H}(a,b,c,h)$ pour tous a,b,c,h.

Exercice 34. On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\forall s>0\ :\ \Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx\,.$$

(1) Soit $\Omega=]0,\infty[\times]0,\infty[\subset\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,v)=(\frac{uv}{1+u},\frac{v}{1+u})$ est un difféomorphisme de Ω sur Ω.
(2) En déduire que pour tout $s\in]0,1[$, on a

$$\int_\Omega\left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)}\,\frac{dxdy}{x}=\int_0^\infty\frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(3) Déduire de (2) que pour tout $s\in]0,1[$, on a

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int_0^\infty\frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\,.$$

(4) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty\frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x=\sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (3).
(5) Déduire de (4) la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u^2}du$.

Exercice 35. Pour $s>0$, on pose comme d'habitude

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\,;$$

et pour $a,b>0$, on pose

$$J(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du\,.$$

(1) Soit $\mathcal{D}=]0,\infty[\times]0,\infty[\subset\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(u,t)=(ut,(1-u)t)$ est un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$.
(2) En déduire que pour tous $a,b>0$ et pour toute fonction borélienne positive $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathcal{D}}f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dxdy=J(a,b)\int_0^\infty t^{a+b-1}f(t)\,dt.$$

(3) Déduire de (2) l'identité
$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$
(4) En posant $u = \sin^2\theta$, montrer qu'on a
$$J(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta\,.$$
(5) Calculer $J(1/2,1/2)$ puis $\Gamma(1/2)$.

Exercice 36. (volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$)
Dans tout l'exercice on note $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathbb{B}_d$ la "boule unité" de $\mathbb{R}^d$, i.e. $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq 1\}$. On pose $V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$. Le but de l'exercice est d'établir la formule
$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\,.$$
(1) Vérifier que la formule est correcte pour $d = 1, 2, 3$.
(2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t}dt$.
(3) Pour $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) = \{(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d;\ \|x\|^2 \leq t\}$ et $V(t) = \lambda_d(\mathbb{B}(t))$.
  (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dx_1\cdots dx_d = \int_0^\infty e^{-t}\,V(t)\,dt.$$
  (b) Montrer qu'on a $V(t) = t^{d/2}V_d$ pour tout $t > 0$.
  (c) En déduire la formule
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}dx_1\cdots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)V_d\,.$$
(4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 37. (intégration d'une fonction radiale)
On note $\|\ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Pour $r > 0$, on pose $V_d(r) = \lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$, où $\mathbb{B}_d(r) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| < r\}$.
(1) Montrer qu'on a $V_d(r) = r^dV_d(1)$.
(2) Soit $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.
  (a) Montrer que pour tout $u \in [0,\infty[$, on peut écrire $\varphi(u) = -\int_u^\infty \varphi'(t)\,dt$.
  (b) En déduire l'identité
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(r)V_d(r)\,dr\,.$$

(c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\, dx = d\, V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r)\, dr\,.$$

Exercice 38. (centre de gravité)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien borné tel que $\lambda_d(\Omega) > 0$. Le **centre de gravité** de Ω est le point $g_\Omega \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\overrightarrow{Og_\Omega} = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_\Omega \overrightarrow{Ox}\, d\lambda_d(x)\,.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Montrer que g_Ω est l'unique point $g \in \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\int_A \overrightarrow{gx}\, d\lambda_d(x) = 0\,.$$

(3) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une bijection affine telle que $\Phi(\Omega) = \Omega$, alors $\Phi(g_\Omega) = g_\Omega$.
(4) Dans cette question, on prend $d = 2$. Montrer que si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un rectangle ou un triangle, alors g_Ω est ce à quoi on s'attend.