Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $x \in [a, b]$. Montrer que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on peut trouver $u, v \in [a, b]$ tels que $x = (1 - \lambda)u + \lambda v$.

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(t) = |at + b|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to J$ une bijection croissante. Montrer que f est convexe si et seulement si f^{-1} est concave.

Exercice 4. Trouver une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui soit convexe mais pas continue.

Exercice 5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si elle est convexe sur $]a, b[$.

Exercice 6. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer qu'on a

$$\int_0^1 f\big((1-t)a + tb\big)\, dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Exercice 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On fixe $x_0 \in I$ et on définit $f : I \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction f est convexe.

(1) Démontrer le résultat en une ligne dans le cas où la fonction φ est *continue.*

(2) On ne suppose plus que φ est continue.

   (a) Soient $u, v \in I$ avec $u < v$. On pose $h = v - u$. Montrer qu'on peut écrire

   $$f(v) - f(u) = \int_0^h \psi(s)\, ds$$

   pour une certaine fonction croissante ψ à déterminer; et que si $\lambda \in [0, 1]$, alors

   $$f\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) - f(u) = \lambda \int_0^h \psi(\lambda s)\, ds$$

   pour *la même* fonction ψ.

(b) Montrer que f est convexe.

Exercice 8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que
$$\forall x, y \in I \ : \ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)\,.$$
Le but de l'exercice est de montrer que f est convexe.

(1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante est vraie :
$$\forall x_1, \dots, x_{2^n} \in I \ : \ f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^n}}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}\big(f(x_1) + \cdots + f(x_{2^n})\big)\,.$$
(2) Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble de tous les nombres $r \in [0,1]$ de la forme $r = \frac{k}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, 2^n\}$. Déduire de (1) que si u, v sont deux points quelconques de I, alors
$$\forall r \in \mathbb{D} \ : f\left((1-r)u + rv\right) \leq (1-r)f(u) + rf(v)\,.$$
(3) Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, on peut trouver une suite (r_n) d'éléments de $\mathbb{D}$ telle que $r_n \to \lambda$.
(4) Montrer que f est convexe.

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue et non constante. Montrer que le maximum de f sur $[a,b]$ ne peut être atteint qu'en a ou en b.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
(1) Montrer que s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$, alors $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
(2) Que peut-on dire s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) > f(b)$?
(3) Montrer que si la fonction f est majorée, alors elle est constante.

Exercice 11. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors ou bien f est constante, ou bien $f(x) \to \infty$ quand $x \to \infty$.

Exercice 12. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ quand $x \to \infty$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$. Montrer que f est décroissante.

Exercice 14. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction concave.

(1) Montrer que si $0 \leq h \leq u$, alors $f(u+h) - f(u) \leq f(h) - f(0)$. (Diviser par h lorsque $h > 0$.)
(2) Montrer que si $f(0) \geq 0$, alors f est **sous-additive** :
$$\forall x, y \geq 0 \ : \ f(x+y) \leq f(x) + f(y)\,.$$

Exercice 15. Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que pour tous $x, y \geq 0$, on a
$$(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

Exercice 16. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que f est convexe et *dérivable*.
(1) En utilisant la formule des accroissements finis, montrer que pour tout $a \in I$, on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) tendant vers a avec $x_n < a < y_n$, telles que $f'(x_n) \to f'(a)$ et $f'(y_n) \to f'(a)$.
(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 17. Montrer que si f et g sont deux fonctions 2 fois dérivables, convexes, positives et toutes les deux croissantes (ou toutes les deux décroissantes) sur un intervalle I, alors fg est convexe.

Exercice 18. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Soit également $t_0 \in I$. Montrer que si $f'(t_0) = 0$, alors f possède un minimum au point t_0.

Exercice 19. Montrer que $f(t) = |3t-2| + \max(t^8 + 3t^6 - t + 1, e^{|5t-8|} - 6)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Est-il vrai que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors $|f|$ est convexe?

Exercice 21. Soient I et $[a,b]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $\Phi : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$. On suppose que
- pour tout $t \in [a,b]$, la fonction $x \mapsto \Phi(t,x)$ est convexe sur I;
- pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto \Phi(t,x)$ est intégrable sur $[a,b]$.

Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_a^b \Phi(t,x)\,dt$ est convexe.

Exercice 22. Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ convexe continue. Montrer que $M(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ est convexe sur $]0,\infty[$.

Exercice 23. Soit $\alpha \geq 2$. Montrer que $f(t) = e^{\alpha t - \cos t}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. Montrer que $f(t) = (1+t)^t$ est convexe sur son domaine de définition.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. Est-il vrai que f est strictement convexe si et seulement si $f''(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Exercice 26. Donner un exemple de fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de non-dérivabilité est infini. (On pourra se contenter d'un dessin.)

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Montrer que la fonction g définie par $g(t) = f(t) - tf'(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 28. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non trivial). Le but de l'exercice est de montrer que pour toute fonction convexe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)\,.$$

(1) Montrer que les inégalités sont satisfaites pour toute fonction *affine* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, et que ce sont en fait des égalités dans ce cas.
(2) Déduire de (1) qu'on a $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ pour toute fonction convexe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(3) Montrer qu'on a $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$ pour toute fonction convexe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, en considérant la fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.

Exercice 29. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de longueur 1, et soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que pour toute fonction continue $u : [a, b] \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_a^b u(t)\,dt \leq \left(\int_a^b u(t)^p dt\right)^{1/p}.$$

Exercice 30. Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. En minorant convenablement $\sin t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)e^{-\lambda \sin t}dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$.

Exercice 31. Montrer que si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction concave continue telle que $0 \leq \phi(a) < \phi(b)$, alors $\int_a^b e^{-\lambda\phi(t)}dt$ tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$.

Exercice 32. Montrer que si $0 < x < 1$, alors $1 + x < e^x < 1 + x(e - 1)$.

Exercice 33. Montrer que la fonction $f(t) = \ln(1 + e^t)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et en déduire que pour tous $x_1, \ldots x_n \in]0, \infty[$, on a

$$1 + \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i)^{1/n}.$$

Montrer ensuite que pour tous $a_1, \ldots; a_n, b_1, \ldots, b_n \in]0, \infty[$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n} + \prod_{i=1}^{n} b_i^{1/n} \leq \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{1/n}.$$

Exercice 34. En considérant $f(t) = \ln(\ln t)$, montrer que pour tous $x, y > 1$, on a

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 35. En considérant $f(t) = t\ln(t)$, montrer que si $a, b, x, y > 0$, alors

$$x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 36. Soient $p_1, \ldots, p_n > 0$ vérifiant $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Montrer qu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} -p_i \ln(p_i) \leq \ln(n).$$

Exercice 37. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Montrer qu'on a

$$\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot$$

Exercice 38. Soit $p > 1$. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p.$$

Exercice 39. Dans tout l'exercice, $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On fixe également $p \in]1, \infty[$, et pour $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on pose

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que pour toutes $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, on a

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Minkowski pour les intégrales**.)

(1) On pose $C = \{u \in \mathcal{C}([a,b]);\ \|u\|_p \leq 1\}$. Montrer que C est un ensemble convexe; autrement dit, que

$$\forall u, v \in C\ \forall \lambda \in [0,1]\ :\ (1-\lambda)u + \lambda v \in C.$$

(2) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $f \neq 0$, alors $\|f\|_p \neq 0$; puis calculer $\left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p \cdot$

(3) Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ non nulles. On pose $u = \frac{f}{\|f\|_p}$ et $v = \frac{g}{\|g\|_p}\cdot$ Montrer qu'on peut écrire

$$\frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} = (1-\lambda)u + \lambda v \,,$$

pour un certain $\lambda \in [0,1]$ à déterminer.

(4) Démontrer l'inégalité souhaitée.

Exercice 40. On garde les notations de l'exercice 39. Le but de l'exercice est de donner une autre preuve de l'inégalité de Minkowski.

(1) Montrer que si $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, alors

$$\|f+g\|_p^p \leq \int_a^b |f(t)|\, |f(t)+f(t)|^{p-1} dt + \int_a^b |g(t)|\, |f(t)+g(t)|^{p-1} dt \,.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant convenablement l'inégalité de Hölder.

Exercice 41. Soit $p \in \,]1, \infty[$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \,.$$

Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \,.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Minkowski pour les sommes**.)

Exercice 42. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **logarithmiquement convexe** si f est strictement positive et si la fonction $\ln f$ est convexe.

(1) Montrer que toute fonction logarithmiquement convexe est convexe.

(2) Donner un exemple de fonction qui soit convexe et strictement positive sur $I =]0, \infty[$, mais pas logarithmiquement convexe.
(3) Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement positive est logarithmiquement convexe si et seulement si : pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda} .$$
(4) Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement positive et 2 fois dérivable est logarithmiquement convexe si et seulement si
$$ff'' \geq f'^2 .$$
(5) Montrer que le produit de deux fonctions logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe.

Exercice 43. Le but de l'exercice est de montrer que si f et g sont des fonctions logarithmiquement convexes et deux fois dérivables sur un intervalle I, alors $f + g$ est logarithmiquement convexe.

(1) Montrer que pour tous $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, on a
$$a_0 b_0\big((a_0 + b_0)(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1)^2\big) \geq b_0(a_0 + b_0)(a_0 a_2 - a_1^2) + a_0(a_0 + b_0)(b_0 b_2 - b_1^2) .$$
(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 44. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement positive. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on définit $f_c : I \to \mathbb{R}$ par
$$f_c(t) = e^{ct} f(t) .$$
Le but de l'exercice est de montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si toutes les fonctions f_c sont convexes.

(1) Démontrer l'implication "facile".
(2) Soient $x, y \in I$ avec $x \neq y$, et soit $\lambda \in]0, 1[$. Montrer que si toutes les fonctions f_c sont convexes, alors
$$\forall c \in \mathbb{R} \ : \ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\, e^{c\lambda(x-y)} f(x) + \lambda\, e^{c\,(1-\lambda)(y-x)} f(y).$$
(3) Soient toujours $x, y \in I$ avec $x \neq y$, et soit $\lambda \in]0, 1[$. Déterminer la valeur de c pour laquelle $\varphi(c) = (1-\lambda)\, e^{c\lambda(x-y)} f(x) + \lambda\, e^{c\,(1-\lambda)(y-x)} f(y)$ est minimal, et vérifier que pour cette valeur de c, on a $\varphi(c) = f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$.
(4) Démontrer l'implication "difficile".

Exercice 45. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 44, montrer que si f et g sont deux fonctions logarithmiquement convexes sur I, alors $f + g$ est logarithmiquement convexe.