Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Exercice 1. Montrer que pour tout $N \geq 1$, on a
$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6};$$
et *en déduire* que pour tout $b > 0$, on a $\int_0^b t^2 dt = \frac{b^3}{3}\cdot$

Exercice 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $M = \sup\{|f'(t)|;\ t \in [a, b]\}$.

(1) Montrer que si $u, v \in [a, b]$ et $u < v$, alors
$$\int_u^v |f(t) - f(u)|\, dt \leq M\, \frac{(v-u)^2}{2}\cdot$$

(2) En déduire que pour tout découpage pointé $\mathcal{D} = ((J_0, t_0), \ldots, (J_{N-1}, t_{N-1}))$ de $[a, b]$ où t_k est la borne de gauche de J_k pour $k = 0, \ldots, N-1$, on a
$$\left| R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{N-1} |J_k|^2.$$

(3) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left| R(f, \underline{\mathcal{D}}_n) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq M\, \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot$$

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{s_k + s_{k+1}}{2}\right), \qquad \text{où} \quad s_k = a + k\, \frac{b-a}{n}\cdot$$

(1) Justifier que $S_n \to \int_a^b f(t)\, dt$ quand $n \to \infty$.

(2) On pose $M = \sup\{|f''(s)|;\ s \in [a, b]\}$.

(a) Montrer que pour tout $m \in [a, b]$, on peut trouver une fonction *affine* α telle que
$$\alpha(m) = f(m) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [a, b] \ :\ |f(t) - \alpha(t)| \leq M\, \frac{(t-m)^2}{2}\cdot$$

(b) Soient $u, v \in [a,b]$ avec $u < v$, et soit $m = \frac{u+v}{2}\cdot$ Montrer que pour toute fonction affine α, on a

$$\int_u^v \alpha(t)\,dt = (v-u)\,\alpha(m)\,.$$

(c) Déduire de (a) et (b) que pour tous $u < v$ dans $[a,b]$, on a

$$\left|\int_u^v f(t)\,dt - (v-u)f\left(\frac{u+v}{2}\right)\right| \leq M\,\frac{(v-u)^3}{24}\cdot$$

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|S_n - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leq M\,\frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot$$

Exercice 4. Utiliser l'Exercice 3 pour donner une valeur approchée de $\ln(3)$ à 10^{-2} près.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}\,\cdot$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent et trouver leurs limites.

Exercice 6. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{pn} + \frac{1}{pn+1} + \cdots + \frac{1}{qn}\cdot$$

(1) Vérifier que $u_n = \sum\limits_{k=0}^{(q-p)n} \frac{1}{pn+k}\cdot$

(2) Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2} \prod\limits_{k=1}^{n} (k^2+n^2)^{1/n}$.

(1) Vérifier que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k^2}{n^2})$.

(2) Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

(1) Vérifier que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \ln(n)$.

(2) En déduire que $\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(n)$ admet une limite (à déterminer) quand $n \to \infty$, et conclure qu'il existe une constante C (à déterminer) telle que
$$u_n \sim C\sqrt{n} \qquad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Exercice 9. Déterminer, si elle existe, la limite de $u_n = \frac{1}{n} \prod\limits_{k=1}^{n} (k+n)^{1/n}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 10. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$. Montrer qu'il existe deux constantes C et β à déterminer telle que S_n est équivalent à $C\,n^\beta$ quand $n \to \infty$.

Exercice 11. Soit $u, v > 0$ et $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe des constantes C et β à déterminer telles que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(nu+kv)^\alpha}$ est équivalent à $\frac{C}{n^\beta}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}\,;$$
et en déduire qu'on peut écrire
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)\,.$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right).$$

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier N tel que : pour tout $n \geq N$ et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$(f'(0) - \varepsilon)\,\frac{n}{n^2+k^2} \leq f\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) \leq (f'(0) + \varepsilon)\,\frac{n}{n^2+k^2}.$$

(2) Montrer que la suite (u_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 14. Le but de l'exercice est de calculer, pour $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$, l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}|\, dt\,.$$

(1) Justifier l'existence de $I(x)$ pour tout $x \in]0,1[\cup]1,\infty[$.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = x^n - 1\,.$$

(3) En utilisant (2) et des sommes de Riemann, déterminer la valeur de $I(x)$ pour $x \in]0,1[$.
(4) Établir l'identité $I(1/x) = I(x) - 2\pi\ln(x)$, et en déduire la valeur de $I(x)$ pour $x > 1$.

Exercice 15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
(2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx$ (par exemple en posant $x = \cos^2 t$, ou bien en remarquant que $x(1-x) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2$ et en faisant un dessin).
(3) Montrer à l'aide des question précédentes et en utilisant des sommes de Riemann que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 16. Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(t)\,|\sin(nt)|\, dt &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f\left(\frac{u}{n}\right)|\sin u|\, du \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} f\left(\frac{x+k\pi}{n}\right)\sin x\, dx\,. \end{aligned}$$

(2) En utilisant le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left[f\left(\frac{x+k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]\sin x\, dx\right| \leq \frac{C}{n}\cdot$$

(3) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t)\,|\sin(nt)|\, dt \to \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\, dt \qquad \text{quand } n \to \infty.$$