

## Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1.** Soient  $a, b > 0$ . Déterminer les primitives de  $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$  sur  $\mathbb{R}$  en utilisant le fait que  $\cos(ax) = \operatorname{Re}(e^{iax})$ .

**Exercice 2.** Soient  $a, b > 0$ . Déterminer les primitives de  $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$  sur  $\mathbb{R}$  en primitivant 2 fois par parties.

**Exercice 3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe deux constantes  $a, b$  avec  $a \neq b$  telles que  $f'' = af$  et  $g'' = bg$ . Établir la formule

$$\int f(x)g(x) dx = \frac{1}{a-b} (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) + cte.$$

**Exercice 4.** Déterminer les primitives de  $f(x) := xe^{3x}$  et  $g(x) := x^2 \cos(2x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer les primitives de  $(\cos x)^n \sin^3 x$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.** Montrer que si  $P$  un polynôme de degré  $n$  et si  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , alors

$$\int P(x)e^{\lambda x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} P^{(k)}(x)e^{\lambda x} + cte.$$

En déduire les primitives de  $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{3x}$ .

**Exercice 7.** Soit  $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ , avec  $b = \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ . Déterminer les primitives de  $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme de degré 2 à coefficients réels. On suppose que  $P$  n'a pas de racines réelles. Calculer  $\int \frac{dx}{P(x)}$  et  $\int \frac{x}{P(x)} dx$  en fonction de  $a$ , de  $b$  et de  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Exercice 9.** Déterminer les primitives de  $f(x) := \frac{4x^3 - 5x^2 + 10x - 21}{x^4 - x^3 - x^2 - 5x + 6}$  (là où elles existent).

**Exercice 10.** Déterminer les primitives de  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2}$ , puis les primitives de  $g(x) = \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^3}$  (là où elles existent).

**Exercice 11.** Montrer que  $\int_0^X \frac{dt}{1+t^3}$  admet une limite quand  $X \rightarrow +\infty$  et déterminer cette limite.

**Exercice 12.** Le but de l'exercice est de montrer que  $I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1}$  existe, et de calculer  $I$ .

- (1) Pour  $R \geq 1$ , on pose  $\phi(R) = \int_1^R \frac{dx}{x^4+1}$ . Montrer que la fonction  $\phi$  est croissante, et qu'on a  $\phi(R) \leq \arctan(R) \leq \frac{\pi}{2}$  pour tout  $R \geq 1$ . En déduire que  $I$  existe.
- (2) Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de la forme  $F(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$ , où on suppose que  $\Delta = b^2 - 4c$  est  $< 0$ .
  - (a) Montrer qu'on peut écrire  $F(x) = A \frac{(x^2 + bx + c)'}{x^2 + bx + c} + \frac{B}{x^2 + bx + c}$ , où les constantes  $A$  et  $B$  sont à déterminer.
  - (b) Calculer  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{(x^2 + bx + c)'}{x^2 + bx + c} dx$ .
  - (c) Montrer qu'on peut mettre  $x^2 + bx + c$  sous la forme  $(x + p)^2 + q^2$ , où  $p$  et  $q$  sont à déterminer, puis calculer  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + bx + c}$  en fonction de  $q$ .
  - (d) Pour tout  $R > 0$ , calculer  $\int_{-R}^R F(x) dx$  en fonction de  $R, A, B, p$  et  $q$ .
  - (e) Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(x) dx = \pi \frac{2\beta - b\alpha}{\sqrt{4c - b^2}}.$$

- (3) Trouver des constantes  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  telles que

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\alpha' x + \beta'}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

- (4) Calculer  $I$ .

**Exercice 13.** Soient  $x, y > 0$  avec  $x \neq y$ . On définit la **moyenne logarithmique** de  $x$  et  $y$  par

$$L(x, y) := \frac{y - x}{\ln(y) - \ln(x)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\sqrt{xy} \leq L(x, y) \leq \frac{x + y}{2}.$$

- (1) Montrer que pour tous  $a, b > 0$ , on a  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .
- (2) En déduire (en développant les carrés et le produit) que

$$\forall t \geq 0 : (t + \sqrt{xy})^2 \leq (t + x)(t + y) \leq \left(t + \frac{x + y}{2}\right)^2.$$

(3) Pour  $R > 0$ , calculer les intégrales

$$\int_0^R \frac{dt}{\left(t + \frac{x+y}{2}\right)^2}, \quad \int_0^R \frac{dt}{(t+x)(t+y)} \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{dt}{(t + \sqrt{xy})^2}.$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

**Exercice 14.** Calculer  $I := \int_0^1 (t^2 + t + 1)e^{3t} dt$  et  $J := \int_0^1 (3t^2 - t + 2) \sin(2t) dt$ .

**Exercice 15.** Calculer  $I := \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ , puis  $J := \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^3}$ .

**Exercice 16.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , et soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\phi'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ . Montrer que  $I(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda\phi(t)} dt$  tend vers 0 quand  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ . (*Intégrer par parties en écrivant  $f(t)e^{-i\lambda\phi(t)} = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times \phi'(t)e^{-i\lambda\phi(t)}$ .*)

**Exercice 17.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose que  $\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(a) = 0 = f^{(k)}(b)$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $\hat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $\hat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$  quand  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercice 18.** Soit  $\lambda > 0$ . Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la limite de  $\int_0^X t^n e^{-t/\lambda} dt$  quand  $X \rightarrow \infty$  (si cette limite existe).

**Exercice 19.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt) dt = \frac{1}{k^2}$ .

**Exercice 20.** Montrer que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t) dt.$$

En déduire que si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, alors

$$\int_a^b P(t) dt = \frac{b-a}{2} (P(a) + P(b));$$

et interpréter géométriquement ce résultat lorsque  $P \geq 0$  sur  $[a, b]$ .

**Exercice 21.** Montrer que si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} (f'(1) - f'(0)) + \int_0^1 \frac{1}{2} \left( t^2 - t + \frac{1}{6} \right) f''(t) dt.$$

En déduire que si  $P$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors

$$\int_0^1 P(t) dt = \frac{1}{2} (P(0) + P(1)) - \frac{1}{12} (P'(1) - P'(0)).$$

**Exercice 22.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que  $f(a) = 0 = f(b)$  et  $\int_a^b f^2 = 1$ . Montrer que  $\int_a^b t f(t) f'(t) = -\frac{1}{2}$ .

**Exercice 23.** Calculer  $I := \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$ .

**Exercice 24.** Calculer  $I := \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$  en posant  $x = \tan t$ .

**Exercice 25.** Calculer  $I := \int_0^1 \frac{e^{2t} + 1}{e^t + 1} dt$ .

**Exercice 26.** Calculer  $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2 + \cos t}$ .

**Exercice 27.** Calculer  $I(\lambda) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda} \frac{dt}{\sin t}$  pour tout  $\lambda \in ]0, \pi[$ .

**Exercice 28.** Calculer  $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{1 + \cos t} dt$  en posant  $x = \cos t$ .

**Exercice 29.** Calculer  $I := \int_1^2 e^{\sqrt{t}} dt$ .

**Exercice 30.** Soit  $\alpha > 0$ . Calculer  $I(\lambda) := \int_1^{\lambda} \frac{dt}{t(1+t^\alpha)}$  pour tout  $\lambda > 0$ , en posant  $x = t^\alpha$ .

**Exercice 31.** Dans cet exercice, on se donne  $a, b \in \mathbb{R}$  vérifiant  $0 < b < a$ .

- (1) Pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ , justifier l'existence des intégrales  $I(\theta) = \int_0^\theta \frac{dx}{a+b \sin x}$  et  $J(\theta) = \int_0^\theta \frac{dx}{a+b \cos x}$ .
- (2) Soit  $\theta$  vérifiant  $0 \leq \theta < \pi$ , et soit  $T = \tan(\theta/2)$ . Calculer  $I(\theta)$  et  $J(\theta)$  en fonction de  $a, b$  et  $T$ .

(3) Dédurre de (2) qu'on a

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)$$

et

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

**Exercice 32.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} dt$ .

(1) Montrer que  $I_n = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^\pi (\cos t)^{2n} dt$ .

(2) En écrivant que  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$  et en utilisant la formule du binôme, déterminer la valeur de  $I_n$ .

**Exercice 33.** Soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone. Le but de l'exercice est de montrer que la formule de changement de variable  $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$  est valable pour toute fonction  $f$  intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle  $J = \phi([a, b])$ . (*La subtilité est que  $f$  n'est pas nécessairement continue.*) Dans ce qui suit, on supposera que  $\phi$  est strictement croissante, de sorte que  $J = [\phi(a), \phi(b)]$ . On rappelle aussi que  $\phi$  est une *bijection* de  $[a, b]$  sur  $J$ .

(1) Soit  $u$  une fonction *en escalier* sur  $[\phi(a), \phi(b)]$ , et soit  $(x_0, \dots, x_N)$  une subdivision de  $[\phi(a), \phi(b)]$  adaptée à  $u$ , avec  $u(x) \equiv \alpha_k$  sur  $]x_k, x_{k+1}[$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ . Déterminer explicitement  $v(t) := u(\phi(t))\phi'(t)$  en introduisant les points  $t_k := \phi^{-1}(x_k)$ . En déduire que  $v$  est (R)-intégrable sur  $[a, b]$  et qu'on a  $\int_a^b v(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} u(x) dx$ .

(2) Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe deux suites  $(v_n)$  et  $(\tilde{v}_n)$  de fonctions (R)-intégrables sur  $[a, b]$  telles que  $v_n \leq g \leq \tilde{v}_n$  pour tout  $n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\tilde{v}_n - v_n) = 0$ . Montrer que  $g$  est (R)-intégrable sur  $[a, b]$  avec  $\int_a^b g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b v_n$ .

(3) Montrer que si  $f$  est une fonction (R)-intégrable sur  $[\phi(a), \phi(b)]$ , alors la fonction  $t \mapsto f(\phi(t))\phi'(t)$  est (R)-intégrable sur  $[a, b]$  et la formule de changement de variable est valable.

**Exercice 34.** Soit  $b > 0$ . Montrer par un calcul que si  $f : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction (R)-intégrable et *impair*, alors  $\int_{-b}^b f(t) dt = 0$ .

**Exercice 35.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction *périodique* de période  $R > 0$ . On suppose que  $f$  est (R)-intégrable sur tout intervalle  $[u, v] \subseteq \mathbb{R}$ . Montrer que si  $[u, v]$  est un intervalle de longueur  $T$ , alors  $\int_u^v f = \int_0^T f$ .

**Exercice 36.** Montrer que pour tout nombre réel  $u \neq -1$  et pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n u^n = \frac{1}{1+u} + (-1)^N \frac{u^{N+1}}{1+u}.$$

En déduire que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x).$$

**Exercice 37.** En raisonnant comme dans l'Exercice 36, montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on peut écrire

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

**Exercice 38.** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on peut écrire

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

**Exercice 39.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose qu'il existe une constante  $C$  et une fonction continue  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall t \in \mathbb{R} : |f^{(k)}(t)| \leq C^k k! \alpha(t).$$

Montrer que pour tout  $x \in ]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}[$ , on peut écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**Exercice 40.** Soit  $\varepsilon > 0$ , et soit  $f : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$ . On suppose qu'on a  $f'(0) = f''(0) = 0$  et  $|f'''(t)| \leq 1 + t^2$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ . Montrer que  $|f(\varepsilon) - f(0)| \leq \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\varepsilon^5}{60}$ .

**Exercice 41.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose qu'il existe des constantes  $M_0$  et  $M_2$  telles que  $\forall s \in \mathbb{R} : |f(s)| \leq M_0$  et  $|f''(s)| \leq M_2$ .

- (1) Soit  $t \in \mathbb{R}$  fixé. Pour  $h \in \mathbb{R}$ , majorer  $|f(t+h) - f(t) - hf'(t)|$  à l'aide de  $M_2$ , et en déduire que  $\forall h > 0 : |f'(t)| \leq \frac{M_2}{2} h + 2 \frac{M_0}{h}$ .
- (2) Montrer qu'on a  $|f'(t)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 42.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $f'(a) = 0 = f'(b)$ . On pose  $M := \sup \{|f''(t)|; t \in [a, b]\}$ .

- (1) Pour  $x \in [a, b]$ , majorer  $|f(x) - f(a)|$  et  $|f(x) - f(b)|$  à l'aide de  $M$ .
- (2) Montrer qu'on a  $|f(b) - f(a)| \leq M \frac{(b-a)^2}{4}$ .

**Exercice 43.** Soit  $a > 0$ .

- (1) Étudier  $\varphi(x) := \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x}\right)$  sur  $]0, \infty[$ .
- (2) Soit  $x_0 > 0$ , et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la récurrence

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

- (3) Placer  $x_1, x_2, x_3$  sur une figure, puis montrer que  $(x_n)$  converge et trouver sa limite.
- (4) Calculer  $\varphi'(\sqrt{a})$ , puis montrer en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange qu'on a  $|\varphi(x) - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (x - \sqrt{a})^2$  pour tout  $x \geq \sqrt{a}$ .
- (5) On suppose que  $a \geq 1/4$  et  $x_0 \geq \sqrt{a}$ . Montrer qu'on a  $|x_n - \sqrt{a}| \leq (x_0 - \sqrt{a})^{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (6) Dans cette question, on prend  $a = 2$  et  $x_0 := 3/2$ . Comment suffit-il de choisir  $n$  pour avoir  $|x_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-10}$ ? (*Observer que  $\sqrt{2} \geq 1,4$* .)

**Exercice 44.** Soit  $a > 0$ , et soit  $k$  un entier au moins égal à 2.

- (1) Étudier  $\varphi(x) := \left(1 - \frac{1}{k}\right)x + \frac{a}{kx^{k-1}}$  sur  $]0, \infty[$ .
- (2) Soit  $x_0 > 0$ , et soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la récurrence

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_n + \frac{a}{kx_n^{k-1}}.$$

Montrer que  $(x_n)$  converge et trouver sa limite.

- (3) En raisonnant comme dans l'Exercice 43 (question (4)), montrer qu'on a

$$|\varphi(x) - a^{1/k}| \leq \frac{k-1}{2} a^{-1/k} (x - a^{1/k})^2 \quad \text{pour tout } x \geq a^{1/k}.$$

- (4) On pose  $c := \frac{k-1}{2} a^{-1/k}$ . Montrer que si  $x_0 \geq a^{1/k}$ , alors

$$|x_n - a^{1/k}| \leq \frac{1}{c} (c(x_0 - a^{1/k}))^{2^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$