

Feuille d'exercices n° 2

Dans tous les exercices, $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} .

Exercice 1. Soient φ une fonction en escalier sur $[a, b]$, et soit $\tilde{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in [a, b]; \varphi(t) \neq \tilde{\varphi}(t)\}$ est fini. Montrer que $\tilde{\varphi}$ est en escalier et qu'on a $\int_a^b \varphi = \int_a^b \tilde{\varphi}$.

Exercice 2. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$, alors $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$.

Exercice 3. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $\forall t \in [a, b] : C_1 \leq f(t) \leq C_2$.

Exercice 4. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Établir les résultats suivants.

- (1) $\bar{\int}_a^b (f + g) \leq \bar{\int}_a^b f + \bar{\int}_a^b g$ et $\underline{\int}_a^b (f + g) \geq \underline{\int}_a^b f + \underline{\int}_a^b g$.
- (2) $\bar{\int}_a^b \lambda f = \lambda \bar{\int}_a^b f$ et $\underline{\int}_a^b \lambda f = \lambda \underline{\int}_a^b f$ pour toute constante $\lambda \geq 0$.
- (3) Si $f \leq g$, alors $\bar{\int}_a^b f \leq \bar{\int}_a^b g$ et $\underline{\int}_a^b f \leq \underline{\int}_a^b g$.

Exercice 5. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t$. Le but de l'exercice est de montrer, en utilisant uniquement la définition de l'intégrabilité, que f est (R)-intégrable sur $[a, b]$ avec $\int_a^b f(t) dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

- (1) En utilisant des fonctions en escalier bien choisies, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_a^b f \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left(a + k \frac{b-a}{N} \right) \times \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad \bar{\int}_a^b f \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left(a + (k+1) \frac{b-a}{N} \right) \times \frac{1}{N}.$$

- (2) Calculer les deux sommes apparaissant dans (1).
- (3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 6. Soit $b > 1$, et soit $f : [1, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = 1/t$. Le but de l'exercice est de montrer, *en utilisant uniquement la définition de l'intégrabilité*, que f est (R)-intégrable sur $[1, b]$ avec $\int_1^b f(t) dt = \ln(b)$.

- (1) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\varepsilon_N > 0$ tel que $(1 + \varepsilon_N)^N = b$, et exprimer ε_N en fonction de b et N .
- (2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En utilisant des fonctions en escalier bien choisies, montrer qu'on a

$$\int_1^{\bar{b}} f \leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1 + \varepsilon_N)^k} \left((1 + \varepsilon_N)^{k+1} - (1 + \varepsilon_N)^k \right)$$

et

$$\int_{\underline{1}}^b f \geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1 + \varepsilon_N)^{k+1}} \left((1 + \varepsilon_N)^{k+1} - (1 + \varepsilon_N)^k \right).$$

- (3) Calculer les deux sommes apparaissant dans (2) en fonction de ε_N , puis en fonction de b et N .
- (4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 7. En utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale, déterminer *sans faire aucun calcul* les valeurs de $I_1 := \int_1^2 t dt$, $I_2 := \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ et $I_3 := \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b])$, et soit $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in [a, b]; \tilde{f}(t) \neq f(t)\}$ est fini. Montrer que $\tilde{f} \in \mathcal{R}([a, b])$ et $\int_a^b \tilde{f} = \int_a^b f$.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (R)-intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier telle que $\int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt < \varepsilon$.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f est (R)-intégrable sur tout intervalle $[u, v]$ où $a < u \leq v < b$. Le but de l'exercice est de montrer que f est (R)-intégrable *sur* $[a, b]$.

- (1) Soit $\eta > 0$ tel que $a + \eta \leq b - \eta$, et soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a + \eta, b - \eta]$. Soit également $M \geq 0$. On définit deux fonctions en escalier $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } a + \eta \leq t \leq b - \eta \\ -M & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{si } a + \eta \leq t \leq b - \eta \\ M & \text{sinon} \end{cases}$$

Exprimer $\int_a^b (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})$ en fonction de $\int_{a+\eta}^{b-\eta} (\psi - \varphi)$, de M et de η .

- (2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 11. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que f ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité. Montrer que f est (R)-intégrable sur $[a, b]$. (Utiliser l'exercice 10.)

Exercice 12. Trouver une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit bornée avec un seul point de discontinuité, mais pas réglée.

Exercice 13. Démontrer la linéarité de l'intégrale pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice 14. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable à valeurs complexes. Le but de l'exercice est de *montrer* que la fonction $|f|$ est (R)-intégrable.

- (1) Soient $u := \operatorname{Re}(f)$ et $v := \operatorname{Im}(f)$. Montrer que si θ_1, θ_2 sont des fonctions en escalier (à valeurs réelles) et si on pose $\phi = \theta_1 + i\theta_2$, alors

$$|\phi| - |f| \leq |\theta_1 - u| + |\theta_2 - v|.$$

- (2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 15. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable.

- (1) On suppose que f est continue et qu'il existe un point $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) \neq 0$. Montrer qu'on peut trouver un intervalle non trivial $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ et une constante $\eta > 0$ tels que $|f(t)| \geq \eta$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$.
- (2) On suppose que f est continue. Montrer que si $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, alors $f = 0$.
- (3) Montrer que le résultat de (2) est faux si f n'est pas supposée continue.

Exercice 16. Le but de l'exercice est de montrer que si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions (R)-intégrables positives, alors

$$\int_a^b fg \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Ce résultat s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** pour les intégrales.

- (1) Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.
- (2) Soient f, g deux fonctions positives et (R)-intégrables sur $[a, b]$. Dédurre de (1) que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_a^b fg \leq \frac{\lambda}{2} \int_a^b f^2 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^b g^2.$$

- (3) Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 17. Pour toute fonction (R)-intégrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, on définit une fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t} dt$. Le but de l'exercice est de montrer que $\widehat{f}(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$, pour toute $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Ce résultat s'appelle le **lemme de Riemann-Lebesgue**.

- (0) Pourquoi suffit-il de démontrer le résultat pour une fonction f à valeurs réelles?
- (1) Montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai pour toute fonction f en escalier.
- (2) Montrer que pour toute fonction $u \in \mathcal{R}([a, b])$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{u}(\lambda)| \leq \int_a^b |u(t)| dt$.
- (3) Soit f une fonction (R)-intégrable sur $[a, b]$ (à valeurs réelles), et soit $\varepsilon > 0$. En utilisant (2) et l'Exercice 9, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction φ en escalier telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : |\widehat{f}(\lambda)| \leq |\widehat{\varphi}(\lambda)| + \varepsilon.$$

- (4) Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction (R)-intégrable f générale.

Exercice 18. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(0) := 0$ et $F(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que F est dérivable en tout point mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Montrer que f ne possède pas de primitive.

Exercice 20. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_{a,n} := \int_0^\pi e^{at} \sin(nt) dt$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On pose $g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.

Exercice 22. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\int_a^b |f(t)| dt = 0$. Montrer que la fonction F définie par $F(x) := \int_a^x |f(t)| dt$ est identiquement nulle, et en déduire que $f = 0$.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\phi(x) := \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt.$$

Montrer que ϕ est solution de l'équation différentielle $\phi'' + \phi = f$.

Exercice 24. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. Pour $x > 0$, on pose $g(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que la fonction g est croissante.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} f(t) dt$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 26. Soient a, b vérifiant $0 < a < b$. Écrire $\ln(b) - \ln(a)$ sous forme d'une intégrale, et en déduire l'inégalité

$$\ln(b) - \ln(a) \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

(Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz; voir l'Exercice 16.)

Exercice 27. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f(0) = 0 = f(1)$, et soit $\alpha > 0$.

- (1) On pose $\phi(t) = t^\alpha f(t)$. Pour $t > 0$, exprimer $f'(t)$ en fonction de $\phi(t)$ et de $\phi'(t)$, puis montrer que

$$t^{2\alpha+1} f'(t)^2 = t\phi'(t)^2 - 2\alpha\phi(t)\phi'(t) + \alpha^2 t^{2\alpha-1} f(t)^2.$$

- (2) Démontrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 t^{2\alpha+1} f'(t)^2 dt \geq \alpha^2 \int_0^1 t^{2\alpha-1} f(t)^2 dt.$$

Exercice 28. Montrer que $\forall x > 0 : \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x < 0 : \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 29. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \int_0^x \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Exercice 30. Dans cet exercice, on considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \right) dt.$$

- (1) Étudier le sens de variation F .
- (2) Montrer que F est impaire.
- (3) En utilisant les inégalités $1+t^2 \leq (1+t)^2$ (valable pour $t \geq 0$) et $1+t^4 \geq t^4$ et en considérant $F(x) - F(1)$, montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- (4) Tracer le graphe de F .

Exercice 31. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$. Montrer que F est dérivable à gauche et à droite en tout point.

Exercice 32. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$.

- (1) Soient $u, v \in I$ avec $u \leq v$, et $\lambda \in [0, 1]$. On pose $z_\lambda := (1 - \lambda)u + \lambda v$. Vérifier que $u \leq z_\lambda \leq v$ et qu'on a

$$F(z_\lambda) - ((1 - \lambda)F(u) + \lambda F(v)) = (1 - \lambda) \int_u^{z_\lambda} f - \lambda \int_{z_\lambda}^v f.$$

- (2) Montrer que pour tous $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y).$$

(Une fonction F vérifiant cette propriété est dite **convexe**.)