

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$k + A = \{k + n; n \in A\}.$$

- (1) Montrer qu'il n'existe pas de loi de probabilité dénombrablement additive $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ qui soit **invariante par translations**, *i.e.* vérifie $\mathbb{P}(k + A) = \mathbb{P}(A)$ pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (2) On note $\mathfrak{A}$ la famille de toutes les parties A de $\mathbb{N}$ telles que $\frac{\#(A \cap [1, n])}{n}$ admette une limite quand $n \rightarrow \infty$; et pour $A \in \mathfrak{A}$, on pose

$$\mathbb{P}_0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [1, n])}{n}.$$

- (a) Montrer que $\mathfrak{A}$ est une algèbre de parties de $\mathbb{N}$, et que $\mathbb{P}_0$ est une “loi de probabilité” *finiment additive* sur $(\mathbb{N}, \mathfrak{A})$.
- (b) Montrer que $\mathbb{P}_0$ est invariante par translations.
- (3) Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \dots, b-1\}$. Déterminer la probabilité, au sens de la loi $\mathbb{P}_0$, qu'un entier soit congru à r modulo b .

Exercice 2. Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois “6”?

Exercice 3. On lance plusieurs fois un dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quelle est la probabilité d'obtenir “6” pour la 1ère fois au n -ième coup?

Exercice 4. On lance un dé jusqu'à obtenir “6”. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais?

Exercice 5. Une grille d'euromillion comporte 5 numéros entre 1 et 50, et 2 numéros entre 1 et 12.

- (1) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot?
- (2) À combien de tirages faut-il participer (en jouant 1 grille à chaque fois) pour avoir au moins une chance sur 100 de gagner au moins une fois le gros lot?

Exercice 6. Parmi un groupe de 30 personnes prises au hasard, dont aucune n'est née un 29 Février, quelle est la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire?

Exercice 7. On achète une galette des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et a été placée “au hasard” dans la galette. Étant donné $l \geq 0$, quelle est la probabilité que le centre de la fève se trouve à une distance au plus égale à l cm du centre de la galette?

Exercice 8. Dans un pays où le vote est obligatoire, une élection oppose 2 candidats C_1 et C_2 . Il y a N électeurs dans le pays, dont N_1 ont l'intention de voter pour C_1 et N_2 ont l'intention de voter pour C_2 .

- (1) On effectue un sondage auprès de n électeurs. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, on note p_k la probabilité que k électeurs parmi les n sondés disent avoir l'intention de voter pour C_1 . Calculer p_k en fonction de k , n , N_1 , N_2 et N .
- (2) Avec les notations de (1), on suppose que N_1 et N_2 sont très grands devant n . Montrer qu'on peut considérer que p_k est à peu près égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où $p = N_1/N$.
- (3) En réalité, 60% des électeurs ont l'intention de voter pour le candidat C_1 . Montrer que si on interroge 9 électeurs (!) au hasard, la probabilité que ce micro-sondage le donne perdant est supérieure à 0,46.

Exercice 9. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ $k \in \{0, \dots, N\}$, on note $p_{N,k}$ la probabilité d'obtenir exactement k fois “pile” en jetant N fois une pièce de monnaie.

- (1) Trouver une formule pour $p_{N,k}$ en fonction de N et de k , et calculer $p_{20,10}$.
- (2) Déterminer, si elle existe, la limite de $p_{2n,n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Ce résultat est-il surprenant?
- (3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n la probabilité d'obtenir un nombre de “piles” compris entre $9n$ et $11n$ quand on lance $20n$ fois la pièce. En utilisant la formule de Stirling, montrer que q_n tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 10. Une boîte opaque contient N dragibus noirs et M dragibus rouges.

- (1) On prend au hasard n dragibus dans la boîte. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, quelle est la probabilité d'avoir tiré k dragibus rouges?
- (2) Même question si on a pris les n dragibus un par un en les remettant à chaque fois dans la boîte.
- (3) Même question si on a pris les n dragibus un par un et qu'on les a mangés au fur et à mesure.

Exercice 11. Une boîte opaque contient 30 dragibus noirs et 40 dragibus rouges. Une petite fille n'aimant que les dragibus noirs tire 5 dragibus l'un après l'autre. Si le dragibus qu'elle tire est noir, elle le mange; et s'il est rouge, elle le remet dans la boîte. Quelle est la probabilité que la petite fille mange exactement 3 dragibus?

Exercice 12. On tire 5 cartes dans un jeu de 52. Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan (mais pas mieux)?

Exercice 13. Un tiroir contient $2n$ chaussettes. Pressé par le temps, le propriétaire des chaussettes prend 2 chaussettes au hasard dans le tiroir. Quelle est la probabilité qu'il ait pris 2 chaussettes de la même paire?

Exercice 14. 200 personnes regardent ensemble la finale de la Champions League, qui oppose le PSG à Monaco. Il y a dans l'assistance 50 supporters du PSG, 50 supporters de Monaco, 40 supporters de Barcelone, 30 supporters du Real Madrid et 30 supporters du RC Lens. Parmi les supporters de Barcelone, 35 soutiennent Monaco 1 soutient le PSG et 4 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du Real, 20 soutiennent le PSG, 5 soutiennent Monaco et 5 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du RC Lens, 10 soutiennent le PSG, 10 soutiennent Monaco et 10 ne soutiennent aucune équipe. On interroge une personne au hasard, qui dit soutenir Monaco. Quelle est la probabilité que cette personne soit supporter du RC Lens?

Exercice 15. Aux Jeux Olympiques, tous les médaillés subissent un contrôle antidopage. Le contrôle est efficace à 99%, mais 1% de vainqueurs "propres" sont cependant contrôlés positifs.

- (1) On subodore que 1 médaillé sur 10 est dopé. Dans ces conditions, peut-on considérer que le test est fiable?
- (2) Même question si on subodore que 1 vainqueur sur 200 est dopé.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soient E, F deux événements tels que $0 < \mathbb{P}(E) < 1$ et $0 < \mathbb{P}(F) < 1$. Montrer qu'on a $\mathbb{P}(E | F) > \mathbb{P}(E)$ si et seulement si $\mathbb{P}(F | E) > \mathbb{P}(F | E^c)$.

Exercice 17. Dans un jeu télévisé, le candidat a devant lui 3 boîtes fermées (et opaques). L'une de ces boîtes contient un lingot d'or, et les deux autres sont vides. L'animateur sait quelle boîte contient le lingot d'or. Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat désigne une des 3 boîtes, sans l'ouvrir; puis l'animateur ouvre une boîte *vide* parmi celles non désignées par le candidat; puis le candidat ouvre une des 2 boîtes restantes, et gagne le lingot d'or s'il s'y trouve. Quelle est la meilleure "stratégie" pour le candidat : décider à l'avance qu'il va changer de boîte, décider à l'avance qu'il va s'en tenir à la boîte qu'il désigne au départ, ou bien décider de choisir au hasard quand arrive le moment d'ouvrir une boîte?

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Montrer que si E et E' sont deux évènements, alors $\mathbb{P}(E \cup E') = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E') - \mathbb{P}(E \cap E')$, et en déduire la **formule de Poincaré** : si $E_1, \dots, E_n$ sont des évènements, alors

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \mathbb{P}(E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k}) \right).$$

Exercice 19. Une personne envoie des cartes de vœux personnalisées à n de ses amis. Comme cette personne est un peu étourdie, elle referme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses; et du coup, elle écrit les adresses au hasard.

- (1) On note p la probabilité que personne ne reçoive la carte qui lui était destinée. En utilisant la formule de Poincaré, montrer que

$$p = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

- (2) Montrer que si $n \geq 7$, il y a entre 36% et 37% de chances que personne ne reçoive la carte qui lui est destinée.

Exercice 20. On fait sécher n paires de chaussettes, toutes différentes mais (malheureusement) toutes de la même couleur. Pour ne pas s'abîmer les yeux, on constitue des paires au hasard. Cependant, on peut sans difficulté distinguer les chaussettes “gauches” des chaussettes “droites”. Quelle est la probabilité de constituer correctement toutes les paires?

Exercice 21. Soit $(\mathbb{P}_n)$ une suite de lois de probabilité sur $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}_n$ est en fait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, i.e. $\mathbb{P}_n$ est portée par $\{0, \dots, n\}$ et $\mathbb{P}_n(\{k\}) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$ pour $k = 0, \dots, n$. On suppose également que np_n admet une limite $\lambda > 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que $(\mathbb{P}_n)$ “converge” vers une certaine loi de probabilité $\mathbb{P}$ à déterminer, au sens où $\mathbb{P}_n(\{k\}) \rightarrow \mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 22. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités sur $\mathbb{N}$, et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}_n(\{\omega\}) \rightarrow \mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ quand $n \rightarrow \infty$.

- (1) Soit $\varepsilon > 0$ donné. Justifier qu'il existe un ensemble fini $F \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\Omega \setminus F) < \varepsilon$, puis montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$: $\mathbb{P}_n(\Omega \setminus F) < \varepsilon$.
- (2) Montrer que $\mathbb{P}_n(A) \rightarrow \mathbb{P}(A)$ pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$.

Exercice 23. Pour $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$, on définit $g_{\sigma,m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_{\sigma,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

- (1) Montrer que $g_{\sigma,m}$ est une densité Lebesguienne, et donner l'allure du graphe de $g_{\sigma,m}$.
- (2) On pose $\mathbb{P}_{\sigma,m} = g_{\sigma,m}(x)dx$. Montrer que $\mathbb{P}_{\sigma,m}$ “tend vers la masse de Dirac δ_m ” quand $\sigma \rightarrow 0$, au sens suivant : pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{\sigma,m} = f(m).$$