

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. On note $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de 0 et de 1. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2. Montrer que si I est un ensemble quelconque, il ne peut pas exister de surjection de I sur $\mathcal{P}(I)$. (Si $\Phi : I \rightarrow \mathcal{P}(I)$ est une application quelconque, montrer que $E = \{i \in I; i \notin \Phi(i)\}$ ne peut pas appartenir à $\Phi(I)$.) Expliquer pourquoi ceci généralise l'Exercice 1.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de montrer que \mathbb{R} n'est pas dénombrable, de trois façons différentes.

(1) *1ère méthode : segments emboîtés.*

(a) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Montrer qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles compacts non-triviaux telle que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \notin I_n$.

(b) En déduire le résultat.

(2) *2è méthode : développement décimal.* On rappelle que tout nombre réel $x \in [0, 1[$ admet un unique développement décimal "propre", autrement dit, x peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) 10^{-k},$$

où les $a_k(x)$ sont des entiers compris entre 0 et 9 et ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Utiliser ce fait pour montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de $[0, 1[$ alors on peut construire un réel $x \in [0, 1[$ différent de tous les x_n , et conclure.

(3) *3è méthode : utilisation de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.* Soit $J : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie comme suit : si $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq 0} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, alors

$$J(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}.$$

Montrer que J est injective, et conclure.

Exercice 4. (nombres transcendants)

Un nombre réel x est dit **algébrique** s'il est racine d'une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme non nul à coefficients rationnels. Un nombre **transcendant** est un nombre qui n'est pas algébrique. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des nombres transcendants.

- (1) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable.
- (2) En déduire que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et conclure.

Exercice 5. Soit Ω un espace métrique séparable. Montrer que toute famille d'ouverts de Ω deux à deux disjoints est dénombrable.

Exercice 6. Montrer que tout ouvert de \mathbb{R} est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 7. On note $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites bornées de nombres réels; autrement dit, de toutes les fonctions bornées $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On munit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

- (1) Pour toute partie E de \mathbb{N} , on note $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de E , que l'on considère comme un point de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Calculer $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{E'}\|_\infty$ pour $E, E' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, et en déduire que si $E \neq E'$, alors les boules ouvertes $B(E, 1/2)$ et $B(E', 1/2)$ sont disjointes.
- (2) Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- (1) Soit $\varepsilon > 0$. On pose $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}; f(x^+) - f(x^-) \geq \varepsilon\}$, où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont les limites à gauche et à droite de f au point x .
 - (a) Montrer que si x_1, \dots, x_N sont des points de D_ε avec $x_1 < \dots < x_N$, alors

$$N \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^N (f(x_i^+) - f(x_i^-)) \leq \frac{1}{\varepsilon} (f(x_N^+) - f(x_1^-)).$$

- (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $D_\varepsilon \cap [-n, n]$ est fini.
 - (c) Conclure que D_ε est dénombrable.
- (2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Exercice 9. Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. On écrit $D = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ et on définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[a_n, \infty[}(x).$$

Montrer que la fonction f est croissante, et que l'ensemble de ses points de discontinuité est exactement égal à D .

Exercice 10. Soit (Ω, d) un espace métrique. Montrer que tout ouvert de Ω est réunion dénombrable de fermés.

Exercice 11. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres positifs. Établir les inégalités suivantes :

$$\underline{\lim} u_n + \underline{\lim} v_n \leq \underline{\lim} (u_n + v_n) \leq \underline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n \leq \overline{\lim} (u_n + v_n) \leq \overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n.$$

Exercice 12. Soit (x_n) une suite de nombres positifs. On suppose que $x_n + \frac{1}{2}x_{2n}$ tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

- (1) On pose $L = \overline{\lim} x_n$ et $l = \underline{\lim} x_n$. En utilisant l'Exercice 11, montrer qu'on a $1 \leq l + \frac{1}{2}L$ et $1 \geq L + \frac{1}{2}l$.
- (2) Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 13. Soit Λ un ensemble, et soit $(\Lambda_k)_{k \in K}$ une partition de Λ . Montrer que si $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille de nombres positifs, alors

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sum_{k \in K} \sum_{\lambda \in \Lambda_k} a_\lambda.$$

Exercice 14. Soit $(a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de nombres positifs indexée par un ensemble produit $I \times J$. Montrer à l'aide de l'Exercice 13 qu'on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

Exercice 15. (série produit)

Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs de sommes

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{et} \quad V = \sum_{l=0}^{\infty} v_l.$$

Soit (w_n) la suite définie par

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Enfin, soit $\Lambda = \{(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; k \leq n\}$. Montrer à l'aide de l'Exercice 13 qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{(k,n) \in \Lambda} u_k v_{n-k} = UV.$$

Exercice 16. (théorème de convergence dominée pour les séries)

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur \mathbb{N} , et soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes :

- (a) $f_n(i) \rightarrow f(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ quand $n \rightarrow \infty$;
- (b) Il existe une fonction $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i \in \mathbb{N}} g(i) < \infty$ et $|f_n(i)| \leq g(i)$ pour tout n et pour tout $i \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrer que la série $\sum f(i)$ est absolument convergente.
- (2) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \geq 0 : \left| \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) - \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \right| \leq \sum_{i=0}^N |f_n(i) - f(i)| + 2 \sum_{i>N} g(i).$$

- (3) Montrer que

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i).$$

Exercice 17. En utilisant la formule du binôme et l'Exercice 16, montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} : e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Exercice 18. Soit Ω un ensemble. Montrer que pour tous $A, B \subset \Omega$, on a

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

Exercice 19. Soit Ω un ensemble, et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de Ω deux à deux disjointes. Exprimer la fonction indicatrice de $\bigcup_{i \in I} A_i$ à l'aide des fonctions indicatrices des A_i .

Exercice 20. Soit Ω un ensemble. Si A et B sont des parties de Ω , on définit leur **différence symétrique** $A \Delta B$ par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- (1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbf{1}_{A \Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B| = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B \pmod{2}.$$

- (2) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta)$ est un groupe commutatif. Préciser l'élément neutre, et le symétrique d'un élément $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- (3) Montrer que $(\mathcal{P}(\Omega), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Préciser l'élément unité.

Exercice 21. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω . On note $\overline{\lim} A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n , et $\underline{\lim} A_n$ l'ensemble des $x \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang. Vérifier qu'on a

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} A_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} A_n.$$

Exercice 22. Soit Ω un ensemble, et soit (A_n) une suite de parties de Ω . Montrer qu'on a

$$\mathbf{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim} \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\underline{\lim} A_n} = \underline{\lim} \mathbf{1}_{A_n}.$$

Exercice 23. Soit Ω un ensemble. On dit qu'une suite (A_n) de parties de Ω est **convergente** si on a $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$, et on note alors $\lim_n A_n$ cet ensemble.

- (1) Comment se traduit la convergence d'une suite d'ensembles en termes de fonctions indicatrices?
- (2) Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (A_n) est convergente; et si c'est le cas, trouver sa limite.
 - (a) La suite (A_n) est croissante.
 - (b) La suite (A_n) est décroissante.
 - (c) Les ensembles A_n sont deux à deux disjoints.