

Examen du 20 Juin 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

- (1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\tan z = 2i$. (On pourra poser $w = e^{iz}$.)
- (2) Trouver les rayons de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} \binom{5n}{n} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} (3 + (-1)^n)^n z^n$.
- (3) Soient $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle (fermé) de centre $a \in \mathbb{C}$ et D un disque ouvert de centre a et contenant R . Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, alors $\int_{\partial R} f(z) dz = \int_{\partial D} f(z) dz$.
- (4) Déterminer les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} : f(2^{-n}) = 4^{-n}$.
- (5) Soit $\mathbb{D} = D(0, 1)$, et soit $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans \mathbb{D} . On suppose qu'on a $|f(z)| \leq (1 - |z|)^{1/7}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. En utilisant le principe du maximum, montrer que $f = 0$.
- (6) Déterminer le développement en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-3}$ dans la couronne $\{1 < |z+2| < 5\}$.
- (7) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ en appliquant le théorème des résidus à des demi-disques bien choisis.
- (8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme, déterminer le résidu de $f(z) = \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}$ au point $z = 0$; puis calculer l'intégrale $\int_{\partial \mathbb{D}} f(z) dz$, où $\mathbb{D} = D(0, 1)$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt$.
- (9) Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . On suppose qu'on a $|f(z) - (z-4)| \leq 1,99$ pour tout $z \in \overline{D}(5, 3)$. Montrer que f s'annule exactement une fois dans le disque $D(5, 3)$.
- (10) Soit $(c_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, on a $|c_n| = o(n^\alpha)$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que la formule $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $U = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 1\}$.
- (11) Soit P un polynôme (à coefficients complexes) et soit $\alpha > 0$. Montrer que la formule $f(z) = \int_0^{\infty} P(t) e^{-t^\alpha z} dt$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
- (12) Justifier qu'il existe une fonction $h \in H(\mathbb{C})$ telle que $\forall u \in \mathbb{C} : \cos(u) = 1 + u^2 h(u)$, puis montrer que la formule $f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(z^k)$ définit une fonction holomorphe sur le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on notera \log la détermination principale du logarithme sur \mathbb{C}^* (obtenue en prenant l'argument dans $] -\pi, \pi]$).

- (1) Montrer que $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$
- (2) Montrer que pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\log(1 + e^{i\theta}) = \log(2 \cos(\theta/2)) + i\theta/2,$$

et que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\log(1 + iy) = \frac{1}{2} \log(1 + y^2) + i \arctan(y).$$

- (3) Vérifier qu'on a $\int_0^1 \frac{\log(1+y^2)}{y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx$.
- (4) Dessiner le domaine élémentaire $K = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ et } |z| \leq 1\}$.
- (5) À l'aide des questions précédentes et du théorème de Cauchy, calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx,$$

et montrer qu'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \cos(\theta/2)) d\theta = \int_0^1 \frac{\arctan(y)}{y} dy.$$

Exercice 2. Soit g une fonction holomorphe *injective* dans le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

- (1) Expliquer, en énonçant précisément les théorèmes utilisés, pourquoi $U := g(\mathbb{D})$ est un ouvert de \mathbb{C} et pourquoi la fonction $g^{-1} : U \rightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe.
- (2) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'on a $f(0) = g(0)$ et $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$.

(a) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{D} : |g^{-1}(f(z))| \leq |z| \quad \text{et} \quad (ii) \quad |f'(0)| \leq |g'(0)|.$$

(b) Montrer à l'aide de (i) que pour tout $r < 1$, on a $f(\overline{D}(0, r)) \subseteq g(\overline{D}(0, r))$.

- (3) Dans cette question, on prend pour g la fonction définie par $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

(a) Montrer que g envoie \mathbb{D} dans le demi-plan $U := \{u \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(u) > 0\}$; puis montrer que g est en fait une bijection de \mathbb{D} sur U et déterminer sa réciproque.

(b) Vérifier que si $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $|z| \leq r < 1$, alors $g(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} = \frac{2r}{1-r^2} \frac{z-r}{1-z}$; et en déduire que pour tout $r < 1$, on a $g(\overline{D}(0, r)) \subseteq \overline{D}(\frac{1+r^2}{1-r^2}, \frac{2r}{1-r^2})$.

- (4) Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f(0) = 1$ et $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(a) Montrer que $\left| \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \right| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et que $|f'(0)| \leq 2$.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a

$$\left| f(z) - \frac{1+|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{2|z|}{1-|z|^2}.$$

(c) Déduire de (b) que $\forall z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re}(f(z)) \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}$.