Université d'Artois
Faculté des sciences Jean Perrin
Licence de Mathématiques
Module *Topologie*

Examen du 6 Janvier 2016

Durée : 4h

Questions de cours.

(1) Soit $\Omega := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^3\neq z^4+y^6 \text{ et } x^2+y^3+z^5<31\}$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit I un ensemble non vide, et soit F un espace vectoriel normé. On note $\ell^\infty(I,F)$ l'ensemble de toutes les applications *bornées* $u : I\to F$. Montrer que $\ell^\infty(I,F)$ est un espace vectoriel, et qu'on définit une norme sur $\ell^\infty(I,F)$ en posant $\|u\|_\infty := \sup\{\|u(t)\|;\ t\in I\}$. Montrer ensuite que si F est complet, alors $\ell^\infty(I,F)$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

(3) Soient (E,d) et (F,d) deux espaces métriques, et soit $f : E\to F$. On suppose qu'il existe une constante $c>0$ telle que $\forall u,v\in E\ :\ d(f(u),f(v))\geq c\,d(u,v)$. Montrer que si (u_k) est une suite de points de E telle que la suite $(f(u_k))$ soit de Cauchy, alors (u_k) est de Cauchy; et en déduire que si E est complet et si f est continue, alors $f(E)$ est un fermé de F.

(4) Montrer *en utilisant le théorème de Baire* que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(5) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

(6) Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires (continues) de E dans E, et on pose $\mathrm{Isom}(E) := \{T\in\mathcal{L}(E);\ \|T(x)\|=\|x\| \text{ pour tout } x\in E\}$. Montrer que $\mathrm{Isom}(E)$ est un compact de $\mathcal{L}(E)$.

(7) Soit $\Omega := \{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z)>0\}$. Montrer que si $K\subseteq\Omega$ est compact, alors il existe $\alpha>0$ tel que $\forall z\in K\ :\ \mathrm{Im}(z)\geq\alpha$.

(8) Soit E un espace métrique, et soit (u_k) une suite de points de E convergeant vers un point $a\in E$. Montrer *en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue* (recouvrements ouverts) que l'ensemble $K := \{a\}\cup\{u_k;\ k\in\mathbb{N}\}$ est un compact de E.

(9) Montrer que $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$ est connexe.

(10) Soit E un espace métrique. Montrer que si A et B sont deux parties connexes de E telles que $A\cap B\neq\emptyset$, alors $A\cup B$ est connexe.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, E et F sont des espaces métriques, et f est une application de E dans F. On note G_f le graphe de f,

$$G_f = \{(x,y) \in E \times F;\ y = f(x)\}\,.$$

(1) Montrer que si f est continue, alors G_f est fermé dans $E \times F$.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{T}$, $F = [0, 2\pi[$, et on définit $f : \mathbb{T} \to [0, 2\pi[$ de la façon suivante : si $z \in \mathbb{T}$, alors $f(z)$ est l'unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $e^{it} = z$. Montrer que G_f est fermé dans $\mathbb{T} \times [0, 2\pi[$, mais que f n'est pas continue.

(3) On revient au "cas général".

  (a) On suppose que G_f est fermé dans $E \times F$. Montrer que si K est un compact de F, alors $f^{-1}(K)$ est fermé dans E. (*Commencer par observer qu'un point $x \in E$ appartient à $f^{-1}(K)$ si et seulement si il existe $y \in K$ tel que $(x,y) \in G_f$.*)

  (b) Montrer que si F est *compact* et si G_f est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

(4) Dans cette question, on suppose que F est compact. Soit $\Phi : E \times F \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un unique $y_x \in F$ tel que $\Phi(x, y_x) = 0$, et on pose $f(x) := y_x$. Montrer que l'application $f : E \to F$ ainsi définie est continue.

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application continue.

(1) Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall x \in E \ :\ d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))\,.$$

  (a) Soit $x_0 \in E$ quelconque, et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$. Montrer qu'on a $d(x_k, x_{k+1}) \leq \varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que la série $\sum d(x_k, x_{k+1})$ est convergente.

  (b) Montrer que la suite (x_k) est convergente.

  (c) Montrer que f possède un point fixe dans E.

(2) Dans cette question, on suppose que f est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$. Montrer que l'hypothèse de (1) est satisfaite avec la fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $\varphi(u) := \frac{1}{1-k}\, d(u, f(u))$. Quel résultat retrouve-t-on en appliquant (1)?

Exercice 3. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\theta : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue telle que $\theta(t) \leq t$ pour tout $t \in [a,b]$. Soient également $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une unique fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(a) = \alpha \quad \text{et} \quad \forall x \in [a,b] \ :\ f'(x) = k\, f(\theta(x))\,.$$

(1) Soit $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Soit également $M > 0$. Pour $u \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose

$$|||u|||_M := \sup_{x\in[a,b]} |u(x)e^{-Mx}| \,.$$

Montrer que $|||\cdot|||_M$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$, et que $|||\cdot|||_M$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(2) Soit $M > 0$. Montrer que si $u \in \mathcal{C}([a,b])$, alors $|u(\theta(t))| \leq |||u|||_M \, e^{Mt}$ pour tout $t \in [a,b]$.

(3) On définit une application $\Phi : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ de la façon suivante : si $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors

$$\forall x \in [a,b] \;:\; \Phi(f)(x) := \alpha + k \int_a^x f(\theta(t))\, dt \,.$$

(a) Soit $M > 0$. Montrer à l'aide de (2) que si $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, alors

$$\forall x \in [a,b] \;:\; |\Phi(g)(x) - \Phi(f)(x)| \leq \frac{k}{M} \, |||g - f|||_M \, e^{Mx} \,.$$

(b) En déduire que si M est suffisamment grand, alors l'application Φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne pour la norme $|||\cdot|||_M$.

(4) Démontrer le résultat souhaité.